

**A betonnyomószilárdság  
szórása alsó korlátjának és  
alulmaradási tágassága felső korlátjának  
hatása a nyomószilárdság  
matematikai statisztikai értékelési  
rendjének működésére**

**GONDOLATOK ÉS ÁBRÁK  
AZ MSZ EN 206:2014 ÉS MSZ 4798:2015  
BETONSZABVÁNY ÉRTELMEZÉSÉHEZ**

**Budapest, 2014. december**

**Dr. Kausay Tibor**

A beton nyomószilárdságának matematikai statisztikai értékelési rendje adott  $n$  mintaelemszám (például próbakockák száma) mellett akkor működőképes, ha a szórás ( $s$ ) – alulmaradási tágasság (*Taerwe*-eloszlás esetén:  $\lambda_n \times s$ , illetve *Student*-eloszlás esetén:  $t_n \times s$ ) koordinátarendszerében az  $y_{Taerwe} = \lambda_n \times s$ , illetve  $y_{Student} = t_n \times s$  egyenes metszi a  $P[s_{\min}, 0]$ ,  $P[s_{\min}, (\lambda_n \times s)_{\max}]$ , illetve  $(t_n \times s)_{\max}]$ ,  $P[s_{\max, \text{test}}, 0]$ ,  $P[s_{\max, \text{test}}, (\lambda_n \times s)_{\max}]$ , illetve  $(t_n \times s)_{\max}]$  pontokkal határolt térnegyed, ahol:

$s_{\min}$  a nyomószilárdság jellemző (karakterisztikus) értékének meghatározása során számításba vehető legkisebb szórás, N/mm<sup>2</sup>;

$s_{\max, \text{test}}$  a felvett koordinátarendszerben megjeleníthető tapasztalati szórások legnagyobbika, azaz az abszcissa-tengely végpontja, ábráinkon  $s_{\max, \text{test}} = 7$  N/mm<sup>2</sup>;

$\lambda_n$  *Taerwe*-féle (alulmaradási) tényező;

$t_n$  *Student*-féle (alulmaradási) tényező;

$(\lambda_n \times s)_{\max}$ , illetve  $(t_n \times s)_{\max}$  a nyomószilárdság jellemző (karakterisztikus) értékének ( $f_{ck} \leq f_{ck, \text{test}}$ ) meghatározása során

- alkalmazandó konstans alulmaradási tágasság (ábráinkon az abszcissa-tengellyel párhuzamos vonal), N/mm<sup>2</sup>, például:  $f_{ck} \leq f_{ck, \text{test}} = f_{cm, \text{test}} - 6$

- vagy a számításba vehető legnagyobb alulmaradási tágasság (ábráinkon az abszcissa-tengellyel párhuzamos vonal alatti terület), N/mm<sup>2</sup>, például:  $f_{ck} \leq f_{ck, \text{test}} = f_{cm, \text{test}} - \lambda_n \times s$  és  $(\lambda_n \times s)_{\max} = 6$ , amely utóbbi az  $f_{cm, \text{test}} - \lambda_n \times s$  összefüggés érvényét korlátozza (ábráinkon az abszcissa-tengellyel párhuzamos vonal feletti területen);

$f_{cm, \text{test}}$  a nyomószilárdság tapasztalati (mért) átlagértéke, N/mm<sup>2</sup>

## Alulmaradási tényezők táblázata

Mintaszám  $n$	Szabadságfok a <i>Student</i> -féle eloszlás esetén $n - 1$	<i>Student</i> -tényező  $t_n$	<i>Taerwe</i> -tényező  $\lambda_n$
	<i>(Stange et al., 1966)</i>		<i>(Taerwe, 1986)</i>
2	1	6,314	
3	2	2,920	2,67
4	3	2,353	2,20
5	4	2,132	1,99
6	5	2,015	1,87
7	6	1,943	1,77
8	7	1,895	1,72
9	8	1,860	1,67
10	9	1,833	1,62
11	10	1,812	1,58
12	11	1,796	1,55
13	12	1,782	1,52
14	13	1,771	1,50
15	14	1,761	1,48
20	19	1,729	
30	29	1,699	
	$\infty$	1,645	

## Megjegyzés az alulmaradási tényezők táblázatához

Az előző diakocka a táblázatában szereplő *Student*-tényező értékek *Stange – Henning* (1966) matematikai statisztikai könyvéből származnak. Ugyanezek az értékek találhatóak *Mohr* (2008) mérnököknek és természettudósoknak szánt matematikai statisztikai könyvében.

Ezekről a *Student*-tényező értékektől bizonyos mértékig eltérnek a visszavont MSZ 4720-2:1980 szabványban szereplő *Student*-tényező értékek, mert azokat annak idején *Palotás* professzor az *Owen* könyvében szereplő, *Wald*- és *Wolfowitz*-féle adatokból határozta meg. (*Owen* 1962; *Palotás*: Mérnöki szerkezetek anyagtana I. kötet III. fejezet 9.93.4. szakasz, p. 645 (1979); *Szalai* 1982: 2.8.5. szakasz).

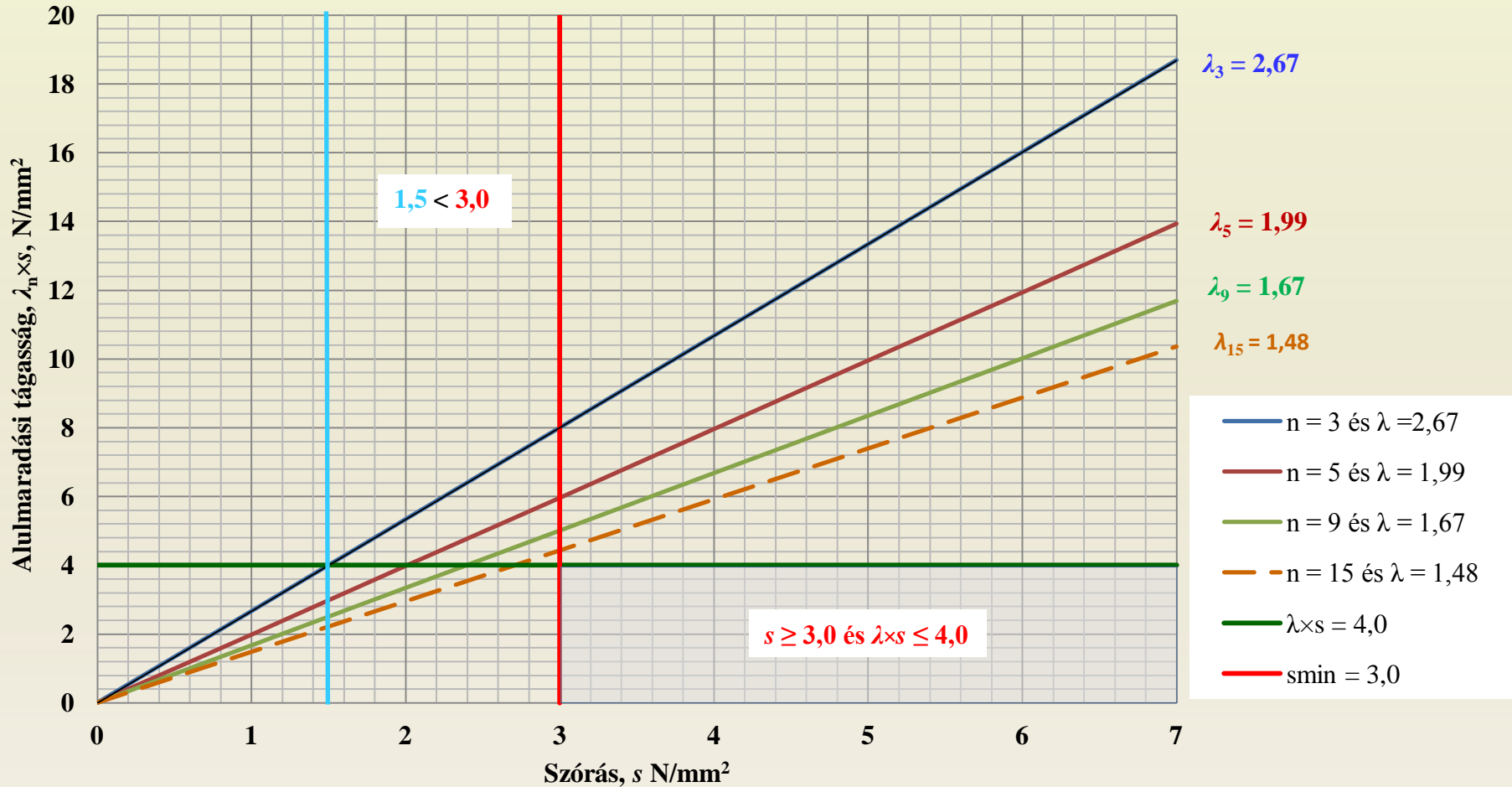
Az előző diakockán közölt táblázatban szereplő *Student*-tényezők valamelyest eltérnek az MSZ EN 1990:2011 Eurocode szabvány D1. táblázatában található *Student*-tényezőktől is:

Próbatestek száma, $n$	1	2	3	4	5	6	8	10	20	30	$\infty$
„ $V$ ismert”	2,31	2,01	1,89	1,83	1,80	1,77	1,74	1,72	1,68	1,67	1,64
„ $V$ ismeretlen”			3,37	2,63	2,33	2,18	2,00	1,92	1,76	1,73	1,64

Az MSZ EN 1990:2011 Eurocode szabvány D1. táblázatáról annyit tudunk, hogy

- a „ $V$  ismert” sor adatait  $(n/(n+1))^{0,5}$  tényezővel megszorozva, minden szorzat eredménye – a kerekítési eltérésektől eltekintve – 1,645, amely a *Gauss*-eloszlás 5 %-os alulmaradási hányadhoz tartozó alulmaradási tényezője;
- a „ $V$  ismeretlen” sor adatait  $(n/(n+1))^{0,5}$  tényezővel megszorozva, minden szorzat eredménye – a kerekítési eltérésektől eltekintve – az  $n$  próbatest számhoz tartozó *Student*-tényezőt adja;
- ha  $n \rightarrow \infty$ , akkor  $(n/(n+1))^{0,5} \rightarrow 1,0$ .

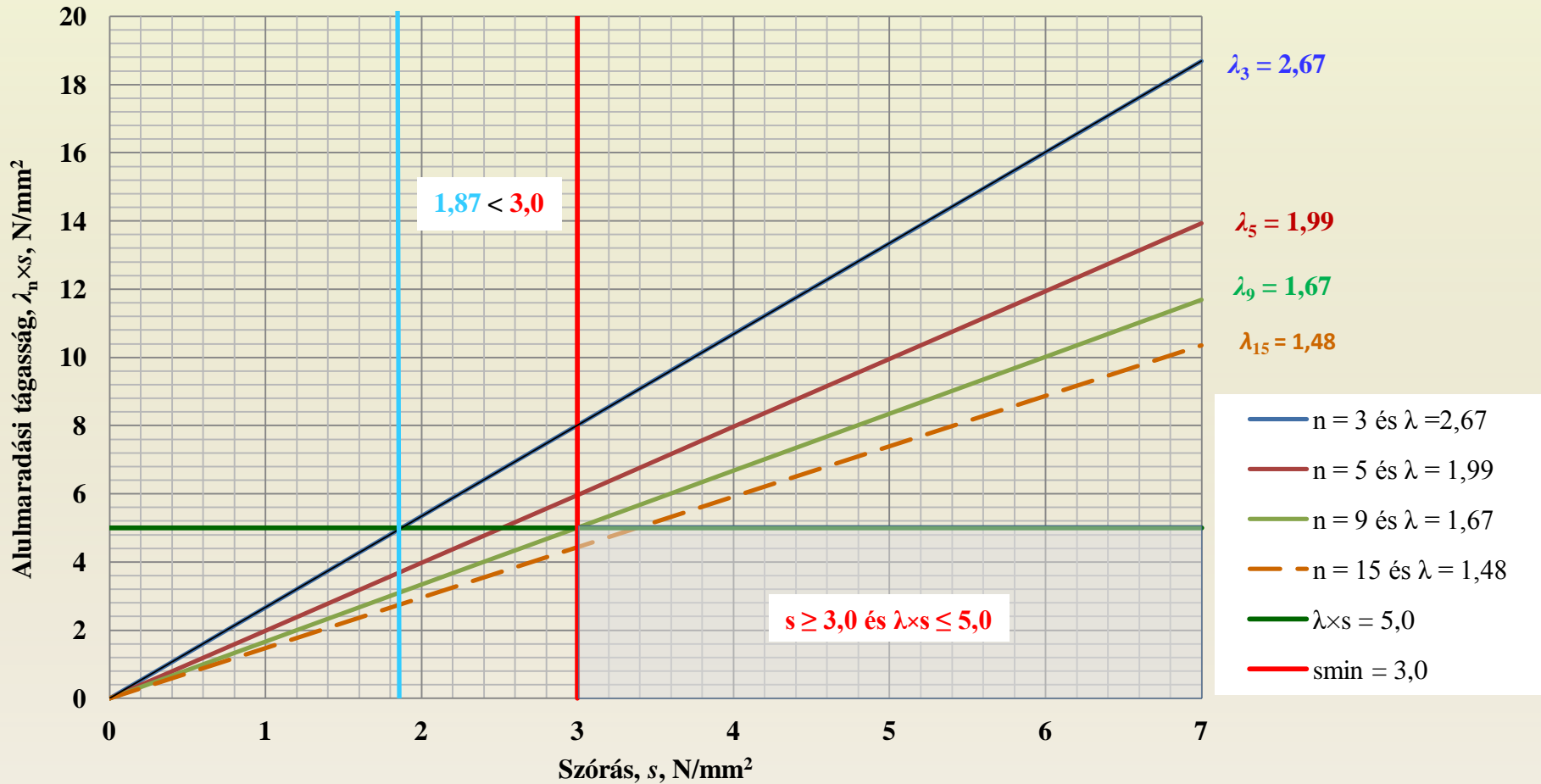
Alulmaradási tágasság *Taerwe*-eloszlás esetén, ha  $\lambda_n \times s \leq 4,0$  és  $s_{\min} = 3,0$



Az  $s_{\min} = 3,0$  feltétel érvényesüléséhez  
 $\lambda_n \times s \leq 4,0$  előírása esetén  
 $n = 15$  próbatest sem lenne elegendő,  
 mert  $\lambda_{15} \times s_{\min} = 1,48 \times 3,0 = 4,44 > 4,0$

$n = 3$  próbatest esetén pedig  
 a *Taerwe*-tényező összefüggés  
 csak  $s_{\min} = 1,5$  feltétel mellett érvényesülne,  
 mert  $\lambda_3 \times s_{\min} = 2,67 \times 1,498 = 4,0$

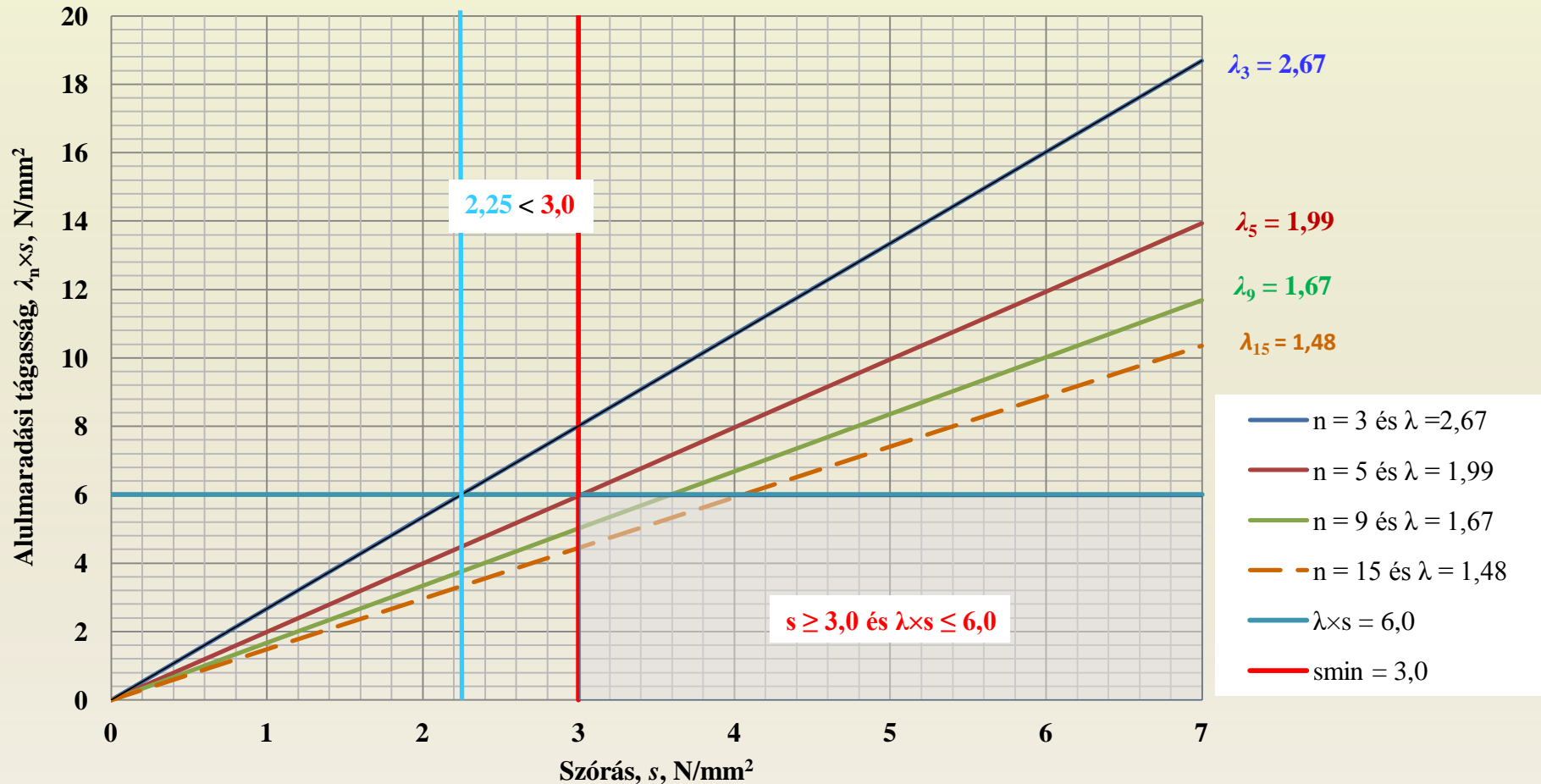
Alulmaradási tágasság *Taerwe*-eloszlás esetén, ha  $\lambda_n \times s \leq 5,0$  és  $s_{\min} = 3,0$



Az  $s_{\min} = 3,0$  feltétel érvényesüléséhez  
 $\lambda_n \times s \leq 5,0$  előírása esetén  
 legalább  $n = 9$  próbatest lenne szükséges,  
 mert  $\lambda_9 \times s_{\min} = 1,67 \times 3,0 = 5,01 > 5,0$

$n = 3$  próbatest esetén pedig  
 a *Taerwe*-tényező összefüggés  
 csak  $s_{\min} = 1,87$  feltétel mellett érvényesülne,  
 mert  $\lambda_3 \times s_{\min} = 2,67 \times 1,87 = 4,99$

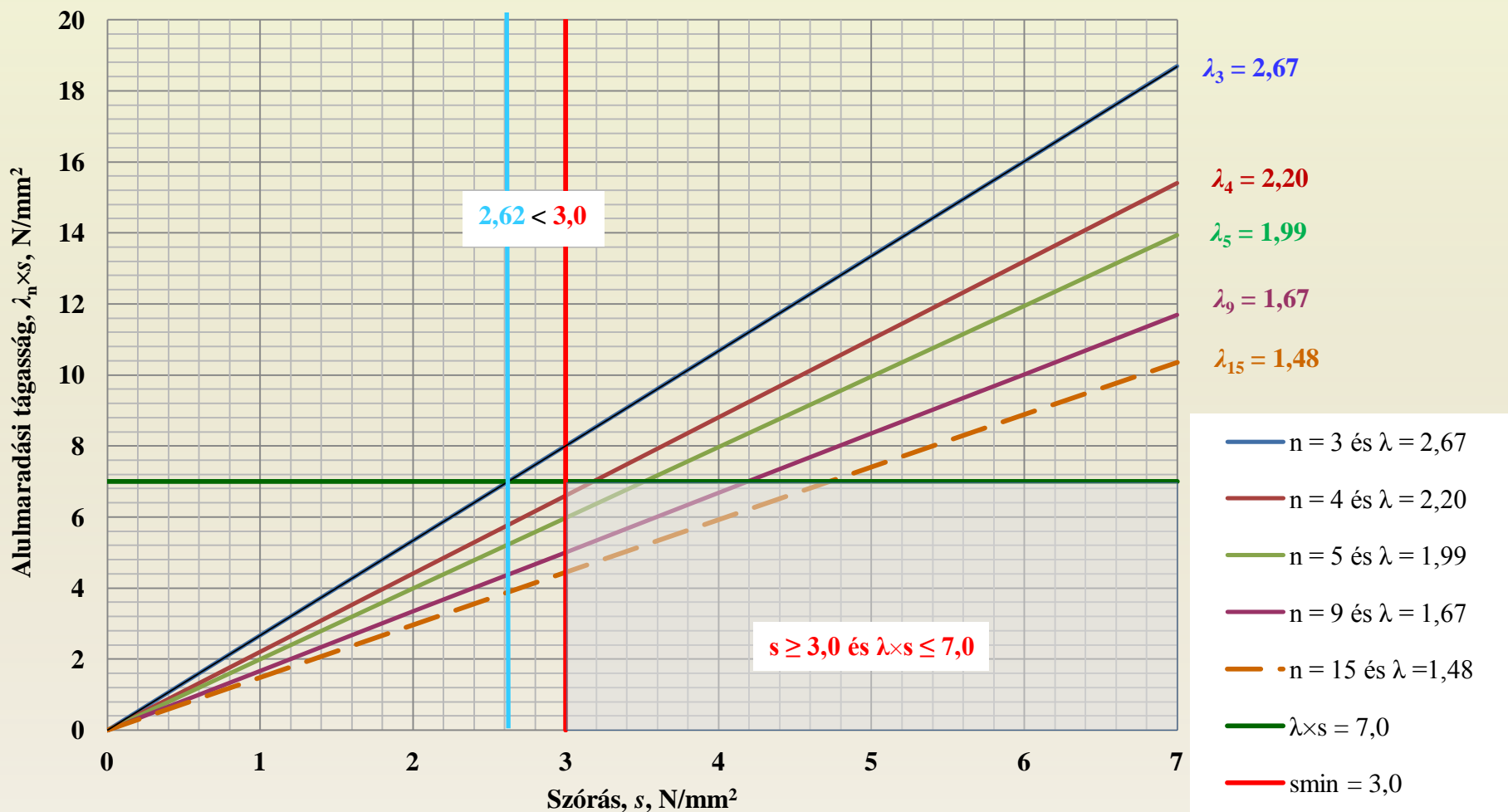
Alulmaradási tágasság *Taerwe*-eloszlás esetén, ha  $\lambda_n \times s \leq 6,0$  és  $s_{\min} = 3,0$



Az  $s_{\min} = 3,0$  feltétel érvényesüléséhez  
 $\lambda_n \times s \leq 6,0$  előírása esetén  
 legalább  $n = 5$  próbatest lenne szükséges,  
 mert  $\lambda_5 \times s_{\min} = 1,99 \times 3,0 = 5,97 \sim 6,0$

$n = 3$  próbatest esetén pedig  
 a *Taerwe*-tényező összefüggés  
 csak  $s_{\min} = 2,25$  feltétel mellett érvényesülne,  
 mert  $\lambda_3 \times s_{\min} = 2,67 \times 2,25 = 6,01$

Alulmaradási tágasság *Taerwe*-eloszlás esetén, ha  $\lambda_n \times s \leq 7,0$  és  $s_{\min} = 3,0$

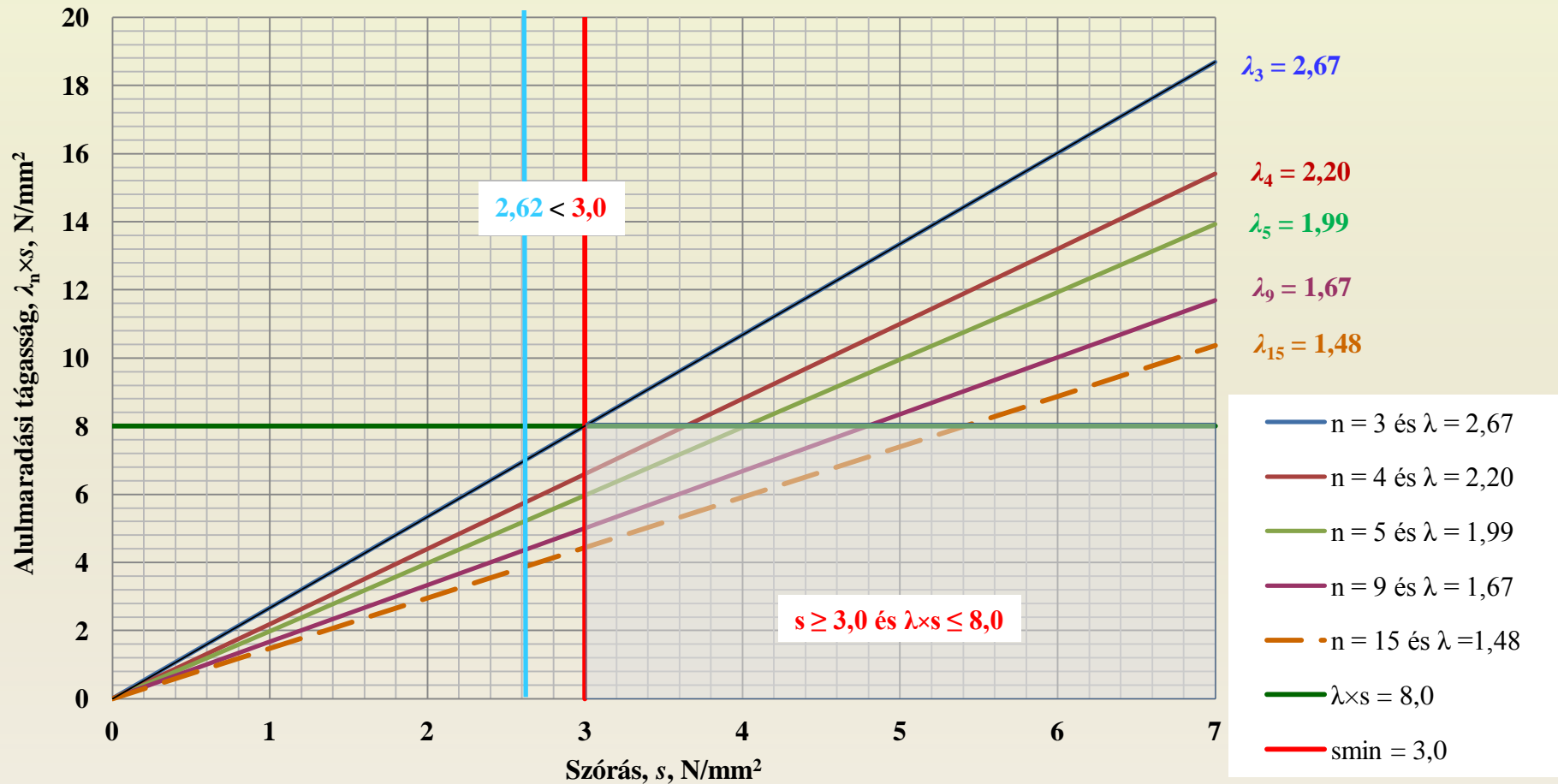


Az  $s_{\min} = 3,0$  feltétel érvényesüléséhez  $\lambda_n \times s \leq 7,0$  előírása esetén legalább  $n = 4$  próbatest lenne szükséges, mert  $\lambda_4 \times s_{\min} = 2,20 \times 3,0 = 6,6 < 7,0$

$n = 3$  próbatest esetén pedig a *Taerwe*-tényező összefüggés csak  $s_{\min} = 2,62$  feltétel mellett érvényesülne, mert  $\lambda_3 \times s_{\min} = 2,67 \times 2,62 = 7,0$



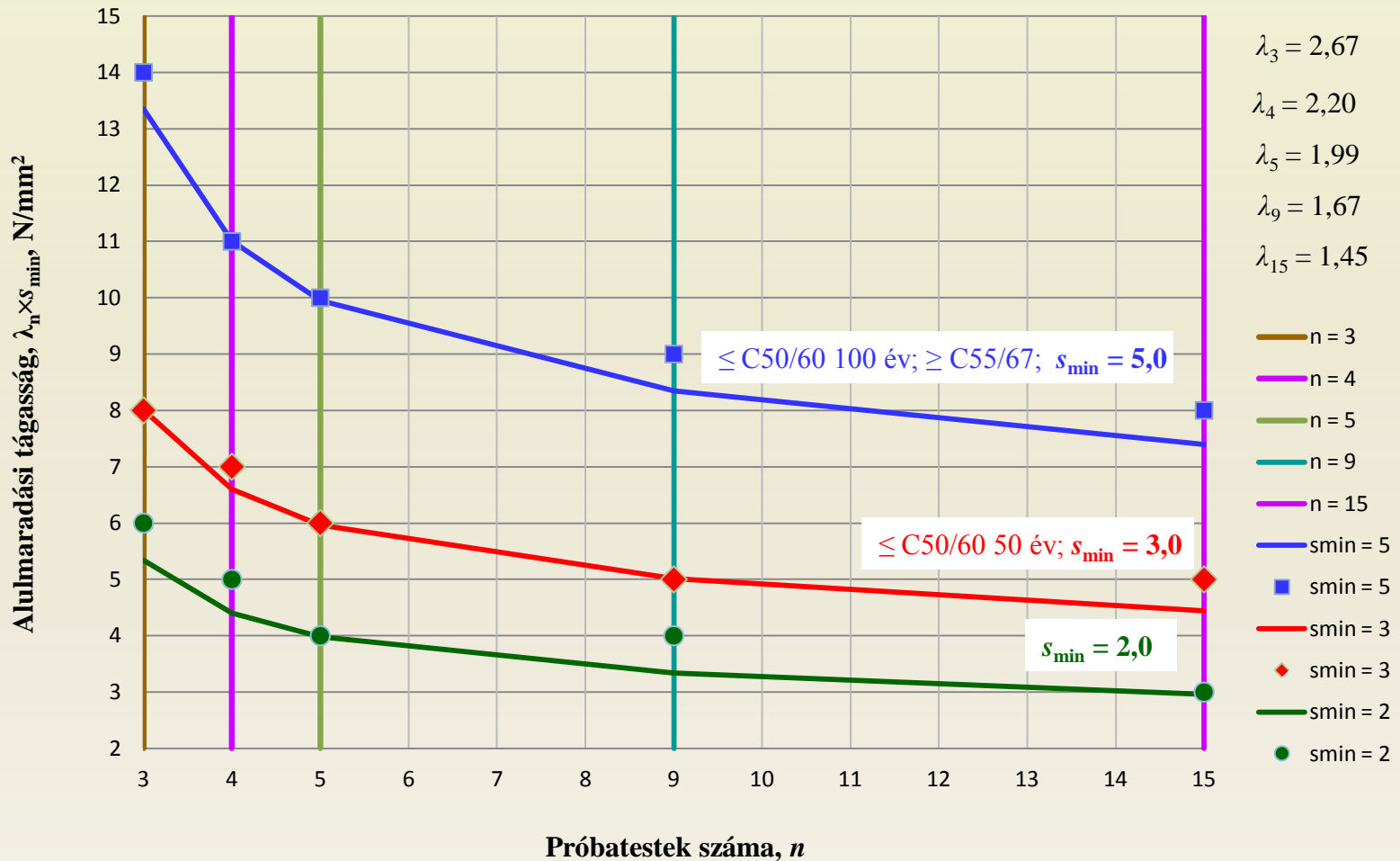
Alulmaradási tágasság *Taerwe*-eloszlás esetén, ha  $\lambda_n \times s \leq 8,0$  és  $s_{\min} = 3,0$



Az  $s_{\min} = 3,0$  feltétel érvényesüléséhez  
 $\lambda_n \times s \leq 8,0$  előírása esetén  
 legalább  $n = 3$  próbatest szükséges,  
 mert  $\lambda_3 \times s_{\min} = 2,67 \times 3,0 = 8,01 \sim 8,0$

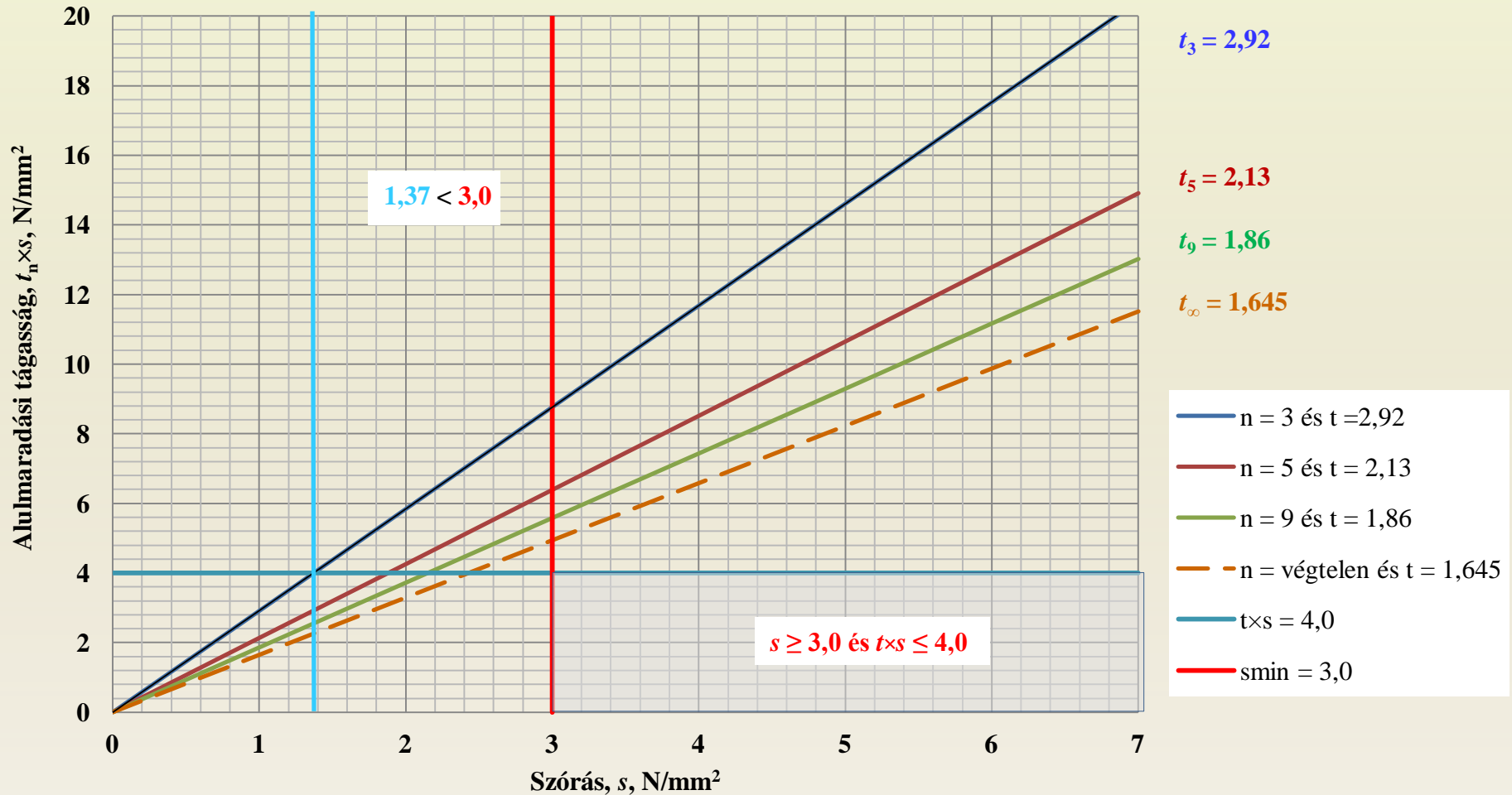
$n = 3$  próbatest esetén tehát  
 a *Taerwe*-tényezős összefüggés  
 $s_{\min} = 3,0$  feltétel mellett érvényesül,  
 mert  $\lambda_3 \times s_{\min} = 2,67 \times 3,0 = 8,01$

$\lambda_n \times s_{\min}$  alulmaradási tágasság szükséges értéke az  $n$  darabszám függvényében,  
 Taerwe-eloszlás esetén, ahhoz, hogy az  $s_{\min}$  feltétel ne sérüljön



A vonalak feletti pontok a felfele kerekített egész számú szükséges  $\lambda_n \times s_{\min}$  értékek

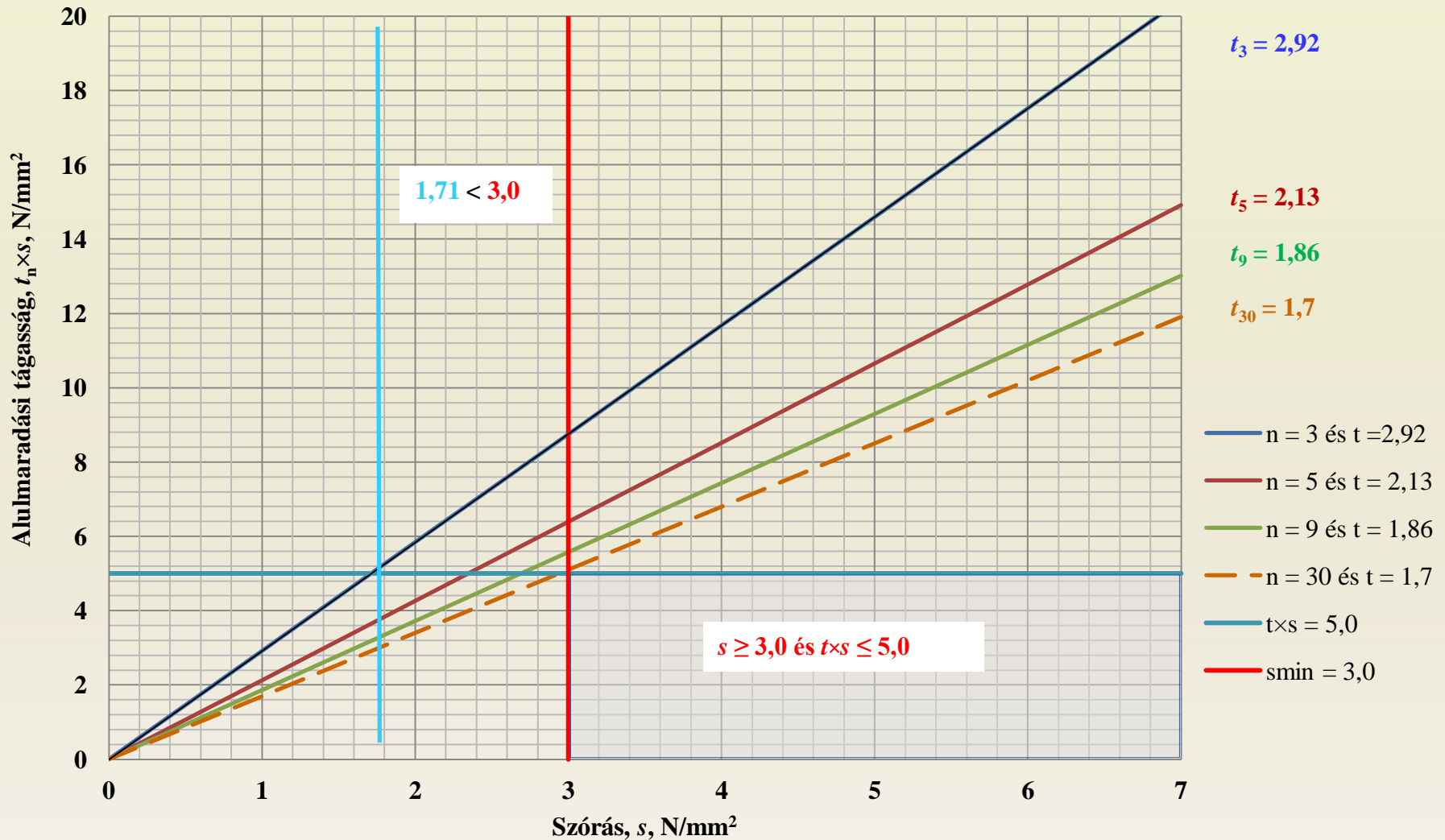
Alumaradási tágasság *Student*-eloszlás esetén, ha  $t_n \times s \leq 4,0$  és  $s_{\min} = 3,0$



Az  $s_{\min} = 3,0$  feltétel érvényesüléséhez  $t_n \times s \leq 4,0$  előírása esetén, végtelen számú próbatest sem lenne elegendő, mert  $t_\infty \times s_{\min} = 1,645 \times 3,0 = 4,935 < 4,0$

$n = 3$  próbatest esetén pedig a *Student*-tényezős összefüggés csak  $s_{\min} = 1,37$  feltétel mellett érvényesülne, mert  $t_3 \times s_{\min} = 2,92 \times 1,37 = 4,0$

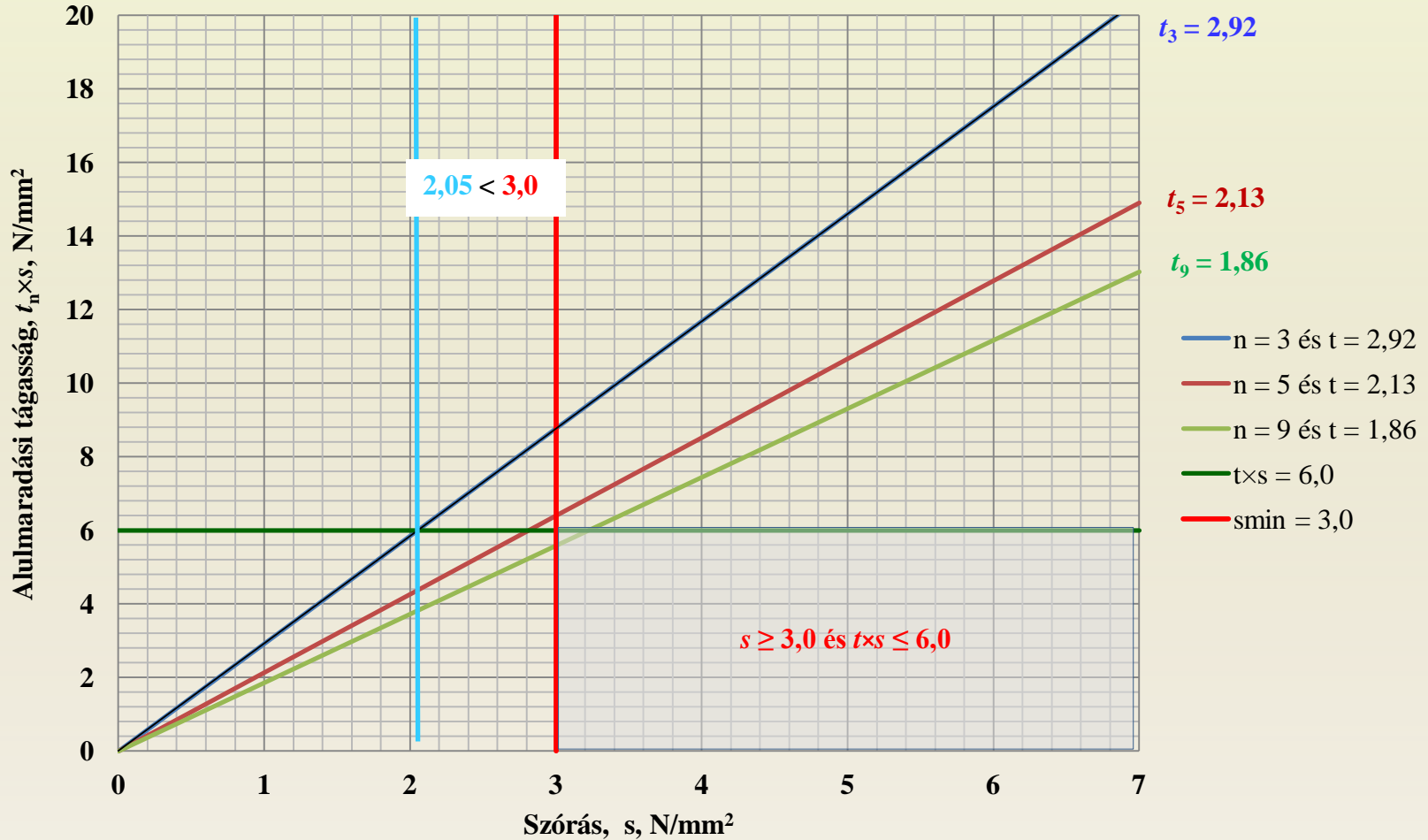
Alumaradási tágasság *Student*-eloszlás esetén, ha  $t_n \times s \leq 5,0$  és  $s_{\min} = 3,0$



Az  $s_{\min} = 3,0$  feltétel érvényesüléséhez  $t_n \times s \leq 5,0$  előírása esetén legalább  $n = 30$  próbatest lenne szükséges, mert  $t_{30} \times s_{\min} = 1,7 \times 3,0 = 5,1 < 5,0$

$n = 3$  próbatest esetén pedig a *Student*-tényező összefüggés csak  $s_{\min} = 1,71$  feltétel mellett érvényesülne, mert  $t_3 \times s_{\min} = 2,92 \times 1,71 = 4,99 < 5,0$

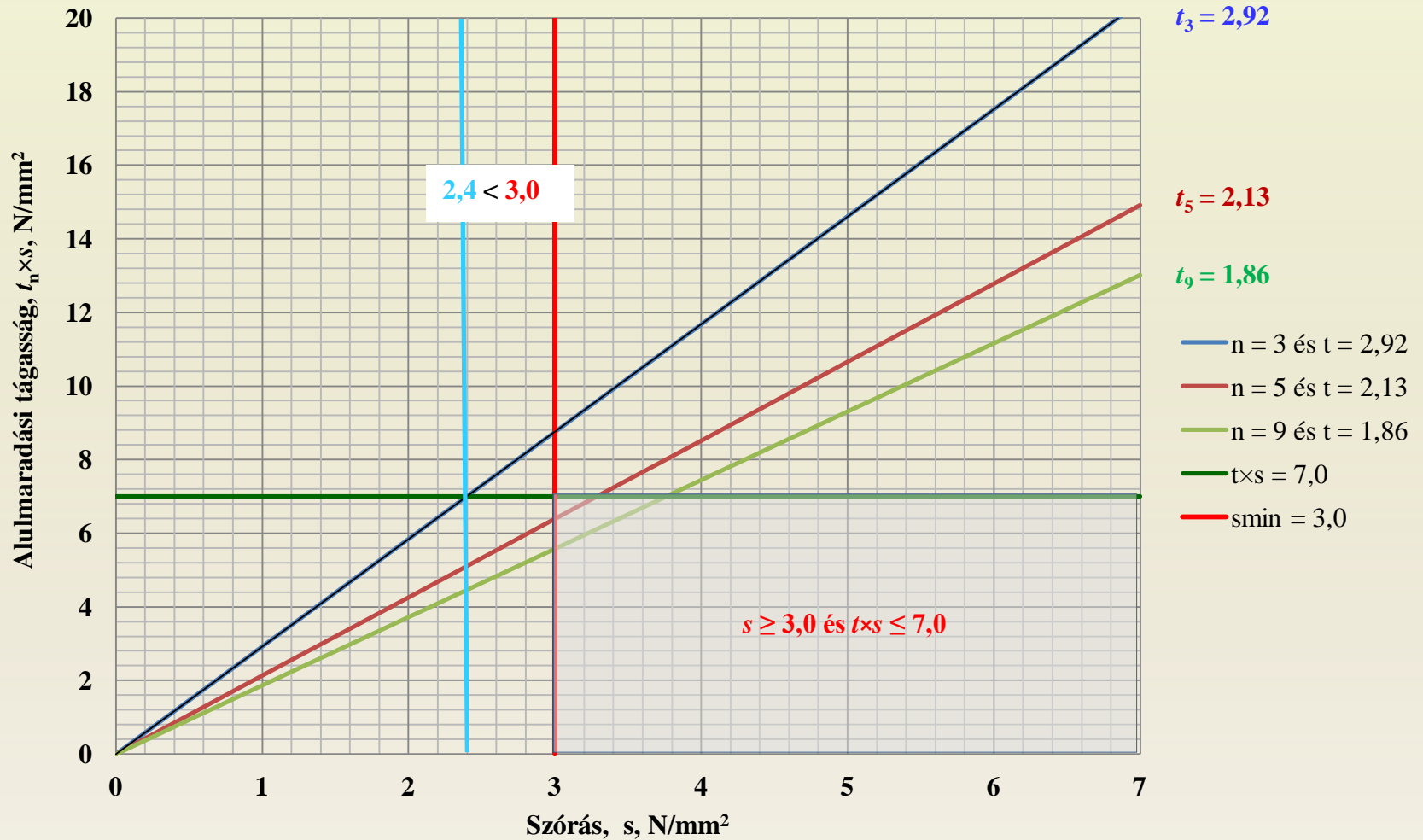
Alulmaradási tágasság *Student*-eloszlás esetén, ha  $t_n \times s \leq 6,0$  és  $s_{\min} = 3,0$



Az  $s_{\min} = 3,0$  feltétel érvényesüléséhez  $t_n \times s \leq 6,0$  előírása esetén legalább  $n = 9$  próbatest szükséges, mert  $t_9 \times s_{\min} = 1,86 \times 3,0 = 5,58 < 6,0$

$n = 3$  próbatest esetén pedig a *Student*-tényezős összefüggés csak  $s_{\min} = 2,05$  feltétel mellett érvényesül, mert  $t_3 \times s_{\min} = 2,92 \times 2,05 = 5,99 < 6,0$

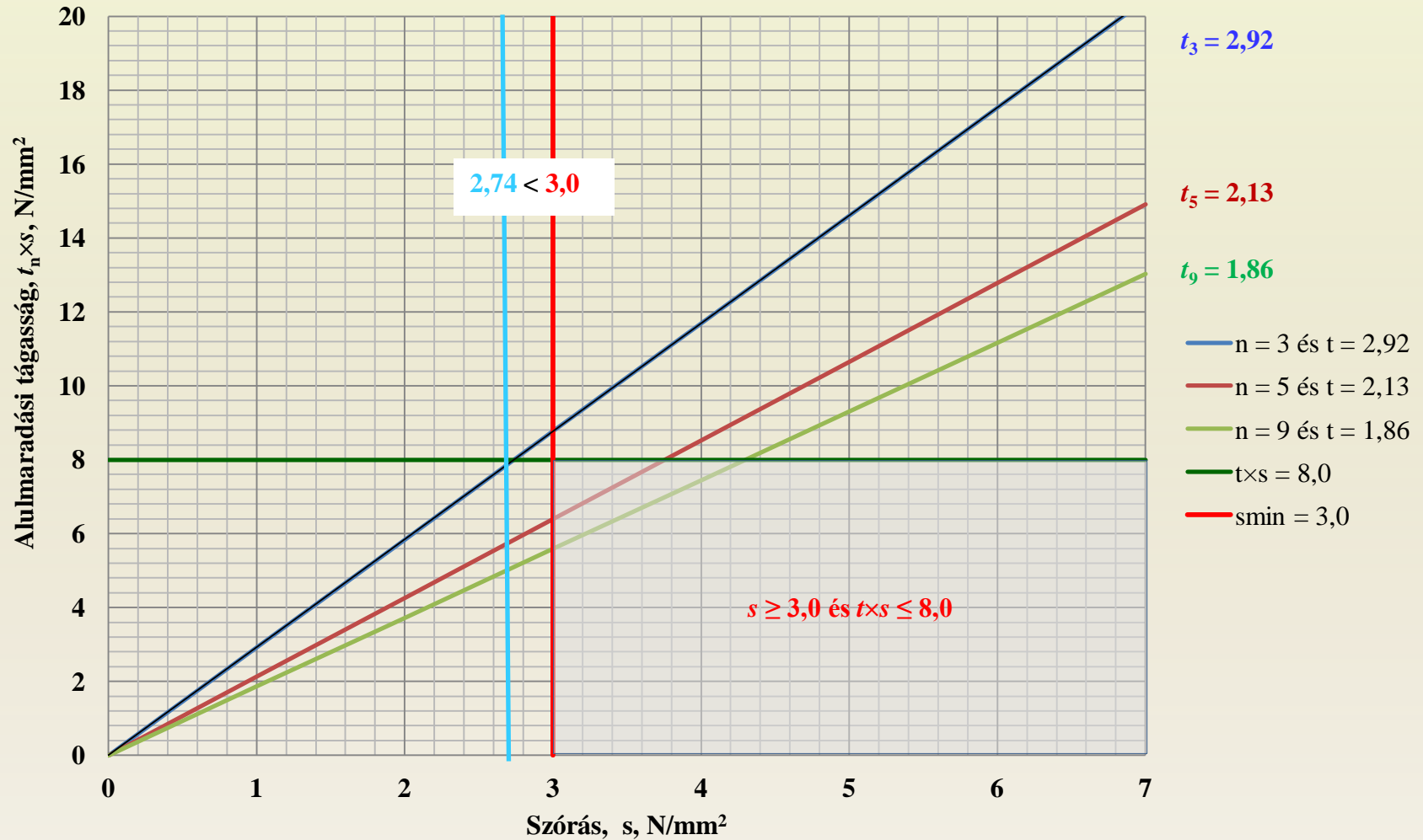
Alulmaradási tágasság *Student*-eloszlás esetén, ha  $t_n \times s \leq 7,0$  és  $s_{\min} = 3,0$



Az  $s_{\min} = 3,0$  feltétel érvényesüléséhez  $t_n \times s \leq 7,0$  előírása esetén legalább  $n = 5$  próbatest szükséges, mert  $t_5 \times s_{\min} = 2,13 \times 3,0 = 6,39 < 7,0$

$n = 3$  próbatest esetén pedig a *Student*-tényezős összefüggés csak  $s_{\min} = 2,397 \sim 2,4$  feltétel mellett érvényesül, mert  $t_3 \times s_{\min} = 2,92 \times 2,397 = 7,0$

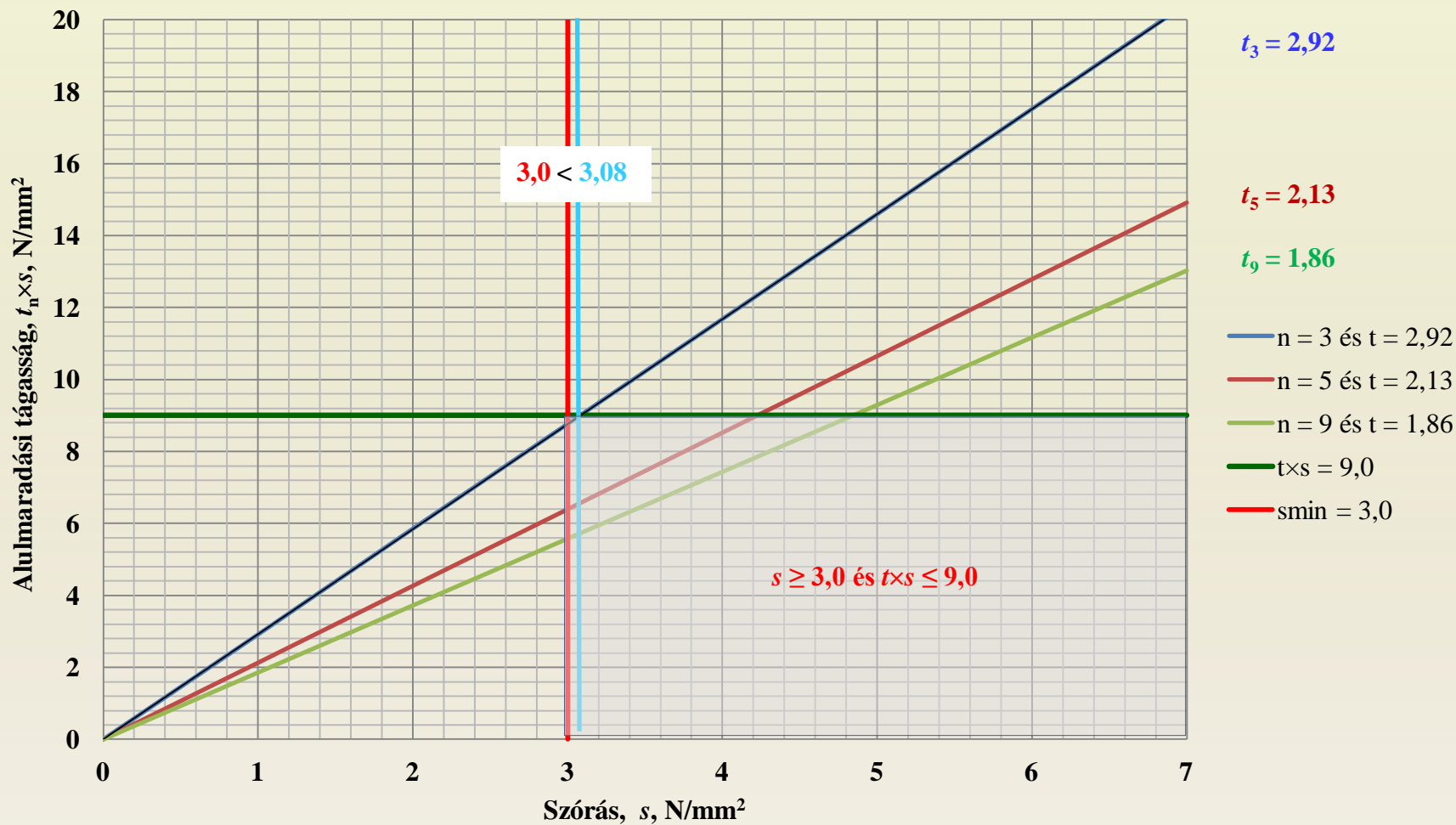
Alulmaradási tágasság *Student*-eloszlás esetén, ha  $t_n \times s \leq 8,0$  és  $s_{\min} = 3,0$



Az  $s_{\min} = 3,0$  feltétel érvényesüléséhez  $t_n \times s \leq 8,0$  előírása esetén legalább  $n = 5$  próbatest szükséges, mert  $t_5 \times s_{\min} = 2,13 \times 3,0 = 6,39 < 8,0$

$n = 3$  próbatest esetén pedig a *Student*-tényezős összefüggés csak  $s_{\min} = 2,74$  feltétel mellett érvényesül, mert  $t_3 \times s_{\min} = 2,92 \times 2,74 = 8,0$

Alulmaradási tágasság *Student*-eloszlás esetén, ha  $t_n \times s \leq 9,0$  és  $s_{\min} = 3,0$

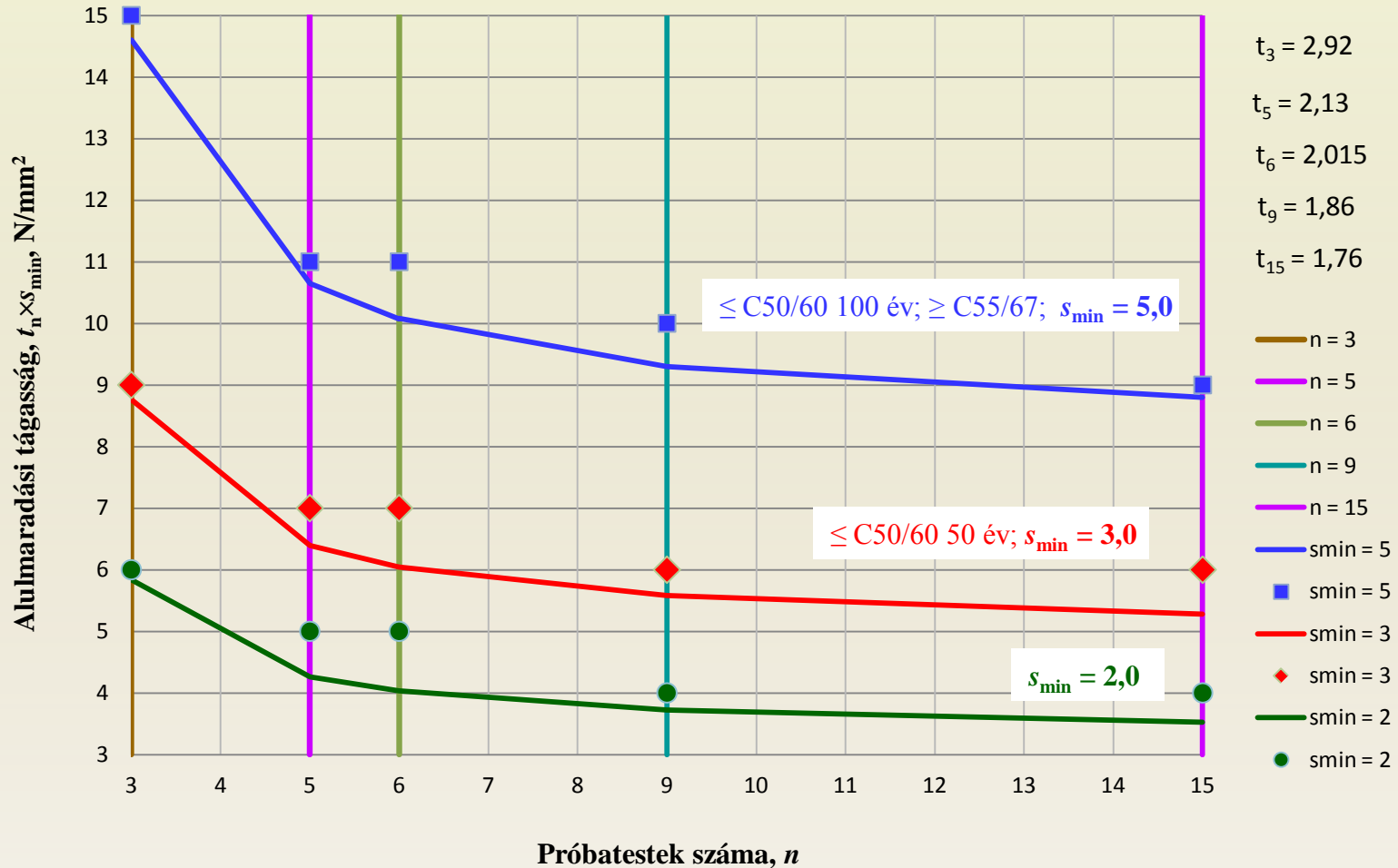


Az  $s_{\min} = 3,0$  feltétel érvényesüléséhez  
 $t_n \times s \leq 9,0$  előírása esetén  
 $n = 3$  próbatest elegendő,  
 mert  $t_3 \times s_{\min} = 2,92 \times 3,0 = 8,76 < 9,0$

$n = 3$  próbatest esetén tehát  
 a *Student*-tényező összefüggés  
 $s_{\min} = 3,08$  feltétel mellett érvényesül,  
 mert  $t_n \times s / t_3 = 9,0 / 2,92 = 3,08 > 3,0$



$t_n \times s_{\min}$  alumaradási tágasság szükséges értéke az  $n$  darabszám függvényében,  
*Student-eloszlás* esetén, ahhoz, hogy az  $s_{\min}$  feltétel ne sérüljön



A vonalak feletti pontok a felfele kerekített egész számú szükséges  $t_n \times s_{\min}$  értékek

**Alulmaradási tágasság szükséges értéke az  $n$  darabszám függvényében, ahhoz,  
hogy az  $s_{\min}$  feltétel ne sérüljön**

**Táblázatos összefoglalás**

Próbatestek száma, $n$	Alulmaradási tágasság szükséges értéke <i>Taerwe-eloszlás</i> esetén, $\lambda_n \times s_{\min}$ , N/mm <sup>2</sup>			Alulmaradási tágasság szükséges értéke <i>Student-eloszlás</i> esetén, $t_n \times s_{\min}$ , N/mm <sup>2</sup>		
	<b>2,0</b>	<b>3,0</b>	<b>5,0</b>	<b>2,0</b>	<b>3,0</b>	<b>5,0</b>
$s_{\min}$ , N/mm <sup>2</sup>	<b>2,0</b>	<b>3,0</b>	<b>5,0</b>	<b>2,0</b>	<b>3,0</b>	<b>5,0</b>
<b>3</b>	5,34 → <b>6</b>	8,01 → <b>8</b>	13,35 → <b>14</b>	5,84 → <b>6</b>	8,76 → <b>9</b>	14,60 → 15
<b>4</b>	4,40 → <b>5</b>	6,60 → <b>7</b>	11,00 → <b>11</b>	<b>5</b>	<b>8</b>	<b>13</b>
<b>5</b>	3,98 → <b>4</b>	5,97 → <b>6</b>	9,95 → <b>10</b>	4,26 → <b>5</b>	6,39 → <b>7</b>	10,65 → <b>11</b>
<b>6</b>	<b>4</b>	<b>6</b>	<b>10</b>	4,03 → <b>5</b>	6,04 → <b>7</b>	10,08 → <b>11</b>
<b>9</b>	3,34 → <b>4</b>	5,01 → <b>5</b>	8,35 → <b>9</b>	3,72 → <b>4</b>	5,58 → <b>6</b>	9,30 → <b>10</b>
<b>15</b>	2,96 → <b>3</b>	4,44 → <b>5</b>	7,40 → <b>8</b>	3,52 → <b>4</b>	5,28 → <b>6</b>	8,80 → <b>9</b>

Hosser, D. – Gensel, D.: Kritische Bewertung der Statistik beim Konformitätsnachweis der Betondruckfestigkeit nach prEN 206. TU Braunschweig, IBMB (Inst. F. Baustoffe, Massivbau und Brandschutz) Im Auftrag des Deutschen Beton-Verein E.V. Braunschweig, 1995.

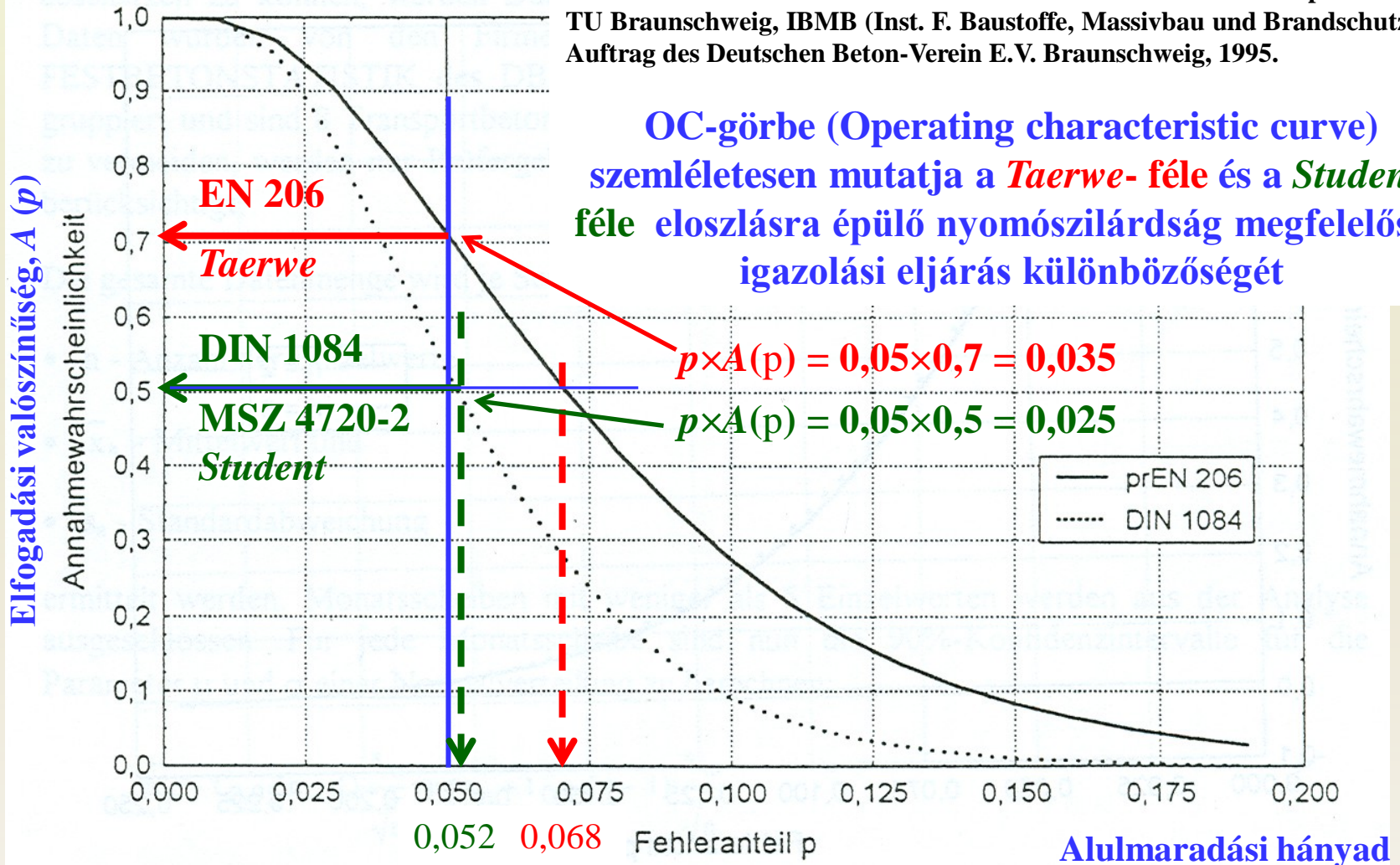


Bild 1: Annahmekennlinien zum Konformitätsnachweis nach prEN 206 und DIN 1084

Elfogadási jelleggörbe a megfelelés igazolásához az **EN 206** és az **MSZ 4720-2** szabvány szerint