

OC-GÖRBE, MŰKÖDÉSI JELLEGGÖRBE, ELFOGADÁSI JELLEGGÖRBE

Németül: OC-kurve, Annahmekennlinie, OC-Funktion

Angolul: Operating characteristic curve

Franciául : Caractéristique de fonctionnement, courbe d'efficacité

Az OC-görbe fogalma

Az OC-görbe (nevezik működési vagy elfogadási jelleggörbének is) valamely p alulmaradási hányadú tétel $A(p)$ elfogadási valószínűségét adja meg, ha a mintavételek n száma és a megengedett nem megfelelő minták $k_{\text{megengedett}}$ száma adott.

Annak valószínűsége, hogy az N elemű, M nem megfelelő elemet tartalmazó halmazból visszatevés nélküli reprezentatív mintavétellel nyert n elemű mintában a nem megfelelő elemek száma k , a P_k hipergeometrikus valószínűségeloszlással számítható ki:

$$P_k = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

A valószínűséget pontosan leíró hipergeometrikus eloszlás esetén a visszatevés nélküli mintavétel következtében minden egyes mintaelem kivételekor megváltozik a halmaz eredeti $p = M/N$ alulmaradási hányada. A hipergeometrikus eloszlás felhasználása nehézséget jelent, hogy nagy N számok mellett a valószínűségek kiszámítása igen körülményes. Ezért azzal a közelítő feltételezéssel szokás élni, hogy a minta elemei csak az adott elem vizsgálatának idejére kerülnek ki a halmazból. Az ilyen visszatevéses reprezentatív mintavétel esetén a nem megfelelő elemek részaránya a halmazban változatlan marad, azaz $p = M/N = \text{konstans}$ (Kausay T. 1970). Ebben az esetben a visszatevéses mintavétel feltételezése mellett a keresett valószínűséget a könnyebben meghatározható

$$B_k = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

binomiális valószínűségeloszlás fejezi ki, ahol $k = 0, 1, 2, \dots, n$; $0 \leq p \leq 1, 0$.

Példaként vizsgáljuk meg, mi a valószínűsége (B_k) annak, hogy különböző p alulmaradási hányadú tételekből $n = 100$ számú mintát véve a nem megfelelő minták száma k . A választ a 100-adrendű, p paraméterű binomiális valószínűségeloszlás gyakoriságfüggvényei adják meg (1. ábra). A binomiális eloszlás diszkrét eloszlás, de szemléletesség kedvéért az 1. és 2. ábrán az egyes valószínűségeket ábrázoló pontokat összekötöttük. Az 1. ábrán látni, hogy a binomiális eloszlás nem szimmetrikus, hanem egyre inkább jobbra elnyúló (jobbra egyre ferdébb), ha p értéke tart a nullához. A binomiális eloszlás a $p = 0,5$ értéknél szimmetrikus, és attól $p = 0,0$, illetve $p = 1,0$ felé távolodva egyre ferdébb (jobbra, illetve balra). Ennek következménye, hogy esetünkben – lévén jobbra ferdülő eloszlás – a modulusnál nagyobb a medián, és a mediánnál nagyobb a valószínűségi változók (k) számtani középérték. A modulus a legnagyobb B_k valószínűséghez tartozó valószínűségi változó (k_{modusz}), itt a gyakoriságfüggvénynek maximuma, az eloszlásfüggvénynek inflexiós pontja van. A medián az a valószínűségi változó ($k_{\text{medián}}$), amelynél az eloszlásfüggvény $\Sigma B_k = 0,5$ értéket vesz fel, feltéve, hogy ilyen létezik (Vincze E. 1972, Vincze I. 1958).

A binomiális valószínűségeloszlás gyakoriságfüggvényeiből meghatározhatók az eloszlásfüggvények, amelyek azt fejezik ki, mi a valószínűsége (ΣB_k) annak, hogy különböző p alulmaradási hányadú tételekből példánk szerint $n = 100$ számú mintát véve, a nem megfelelő minták száma legfeljebb $k_{\text{megengedett}}$ (2. ábra).

A 2. ábra valószínűségi eloszlásfüggvényeiből leolvasható, hogy a tételből $n = 100$ számú mintát véve, annak a valószínűsége, hogy a nem megfelelő minták megengedett száma – mint a tétel elfogadásának feltétele – $k_{\text{megengedett}} = 5$, például $p = 0,01$ alulmaradási hányadú tétel esetén 0,9995, $p = 0,02$ alulmaradási hányadú tétel esetén 0,9845, $p = 0,03$ alulmaradási hányadú tétel esetén 0,9192 stb. A 2. ábra $k_{\text{megengedett}} = 5$ abszcisszájához tartozó $(p, \Sigma B_k)$ értékpárokat új koordinátarendszerben ábrázolva és folyamatos vonallal összekötve, a $\Sigma B_k = A(p)$ elfogadási valószínűségeket kapjuk meg a tétel tényleges p alulmaradási hányada függvényében (3. ábra középső görbe). Az így megszerkesztett 3. ábra szerinti függvényt nevezzük OC-görbének. A görbe alatti tartomány az elfogadási feltételt kielégítő esetek megjelenési helye.

Az OC-görbéből tehát például azt olvashatjuk le, mi a valószínűsége annak, hogy a p (például 0,05) alulmaradási hányadú tételből kivett n (például 100) számú mintában a megengedett nem megfelelő minták száma legfeljebb k , azaz $k_{\text{megengedett}}$ (például 5). Ebben az esetben a tételt éppen elfogadjuk, aminek a valószínűsége a példánkban $\Sigma B_k = A(p) = 0,616$.

Az OC-görbét három paraméter határozza meg: a valószínűségeloszlás függvény típusa (esetünkben binomiális), amely a p , n , k változók közötti kapcsolatot fejezi ki, a mintavételek száma és a megengedett nem megfelelő minták száma. Ha adott n mintavételi szám (esetünkben $n = 100$) és adott p tényleges alulmaradási hányad esetén a megengedett nem megfelelő minták száma növekszik (a 3. ábrán $k_{\text{megengedett}} = 3 \rightarrow 7$), akkor az $A(p)$ elfogadási valószínűség növekszik. Ha adott nem megfelelő minta szám (esetünkben $k_{\text{megengedett}} = 5$) és adott p tényleges alulmaradási hányad esetén az n mintavételi szám növekszik (a 4. ábrán $n = 50 \rightarrow 200$), akkor az $A(p)$ elfogadási valószínűség csökken.

A minták nem megfelelőségének feltétele és a megengedett nem megfelelő minták száma (részaránya) építőanyag fajtánként és szabványonként változik. Például szilárdsági szempontból nem megfelelő a beton próbatest, ha nyomószilárdsága kisebb, mint az f_{ck} előírt jellemző érték, és a megengedett nem megfelelő minták száma $n = 100$ esetből $k_{\text{megengedett}} = 5$ (MSZ 4798-1:2004); szilárdsági szempontból nem megfelelő a B500 jelű bordázott hegeszthető betonacél pálca, ha folyáshatárának jellemző értéke kisebb, mint $0,97 \cdot R_e = 0,97 \cdot 500 = 485 \text{ N/mm}^2$ és szakítószilárdsága kisebb, mint $0,97 \cdot R_m = 0,97 \cdot 600 = 582 \text{ N/mm}^2$, és a megengedett nem megfelelő minták száma $n = 100$ esetből $k_{\text{megengedett}} = 5$ (MSZ 339:2008.10.06. szabványjavaslat) stb.

OC-görbe a beton nyomószilárdság szerinti megfelelőségének értékelésére

A CEB-CIB-FIP-RILEM munkabizottsága 1975-ben a „Recommended Principles for the Control of Quality and the Judgement of Acceptability of Concrete” című ajánlásában megadta, és 1978-ban a betonszerkezetekre vonatkozó CEB-FIP modell-kódban közzétette az OC-görbék határvonalait, amelyek a kétszeres valószínűségi koordinátarendszerben egyenesek (CEB-FIP 1978, Palotás L. 1979, Windisch A. – Szalai K. 1982, Windisch A. – Balázs Gy. 1983, György L. - MÉÁSZ ME-04.19:1995, 6.3.4.4.4. szakasz). E koordinátarendszer hasonlít a Gauss-papírhoz (Gauss-háléhoz), ordináta tengelye a Gauss-féle normáeloszlás eloszlásfüggvényének inverz függvénye szerint készült, de abszcissa tengelye nem egyenletes és nem logaritmikus, hanem feltehetőleg logaritmikus normális beosztású (5. és 6. ábra). Az 5. és 6. ábrán az alsó határvonal alatti terület a gazdaságtalan (túl biztonságos) megoldások tartománya, a felső határvonal feletti terület a nem biztonságos megoldások tartománya.

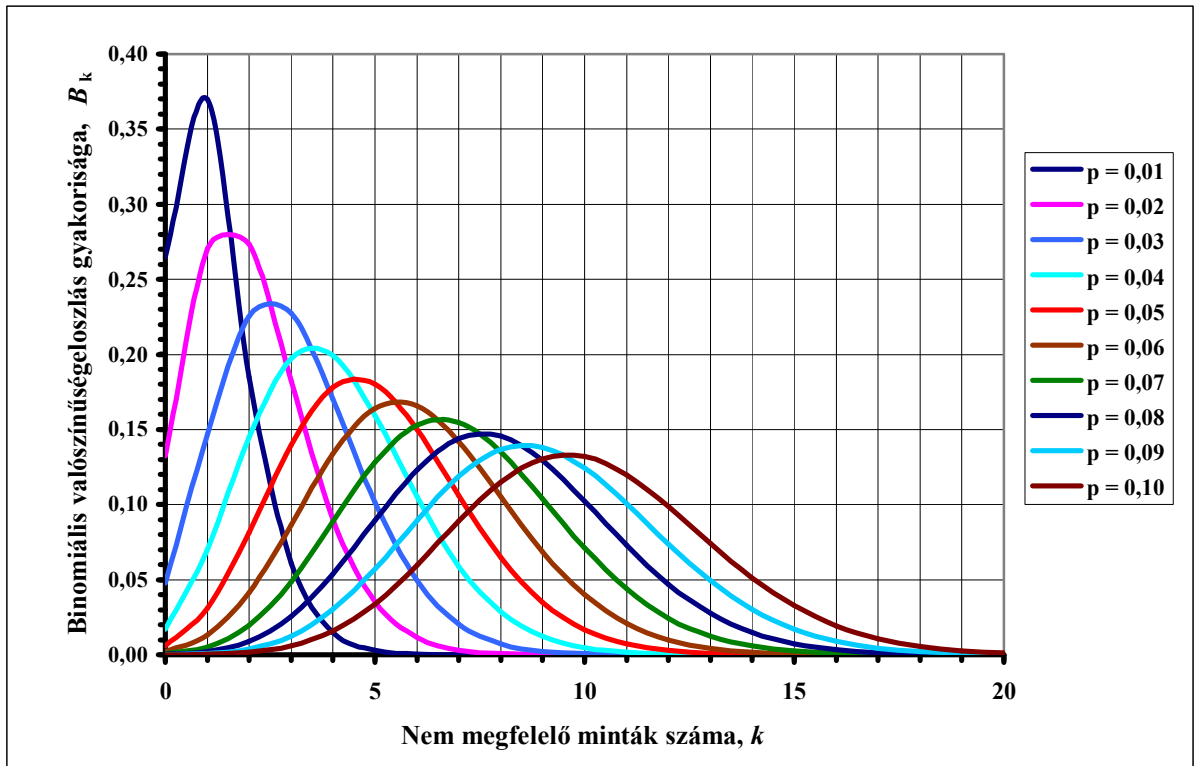
Taerwe, L. 1986-ban a CEB-FIP – transzformált koordináta-rendszerben – egyenes határvonalait görbe vonalakkal helyettesítette (5., illetve 6. ábra). A felső határgörbét (a nem biztonságos tartomány határgörbét) úgy szerkesztette meg, hogy arra fennáll az $p \cdot A(p) = 0,05$ egyenlőség (például 0,05·1,0; 0,1·0,5; 0,2·0,25; 0,5·0,1). Elfogadási feltételeinek OC-görbét (transzformált koordináta-rendszerben közel egyenesek) a (0,1; 0,5) koordinátájú pontban érintőlegesen a felső határgörbéhez illesztette (6. ábra). A 6. ábrán feltüntetett $n = 15$, $\lambda = 1,48$ paraméterű *Taerwe*-féle OC-görbe a vizsgálati eredmények közötti gyenge összefüggés (egymástól nem teljesen független eredmények) esetén érvényes. Ezt alkalmazza az MSZ EN 206-1:2002 betonszabvány a folyamatos gyártás nyomószilárdsági megfelelőségének 1. feltételeként, és átvette az MSZ 4798-1:2004 nemzeti alkalmazási dokumentum is.

A 6. ábrán – összehasonlításként – a visszavont MSZ 4720-2:1980 szabvány elfogadási feltételének OC-görbét is megrajzoltuk. Az MSZ 4720-2:1980 szabvány szilárdsági előírása azon a feltételezésen alapult, hogy a szabványos betonok variációs tényezője (a szilárdság szórása osztva az átlagos nyomószilárdsággal) 0,15, és szilárdság eloszlása a *Gauss*-féle normális eloszlásnak felel meg (MÉÁSZ ME-04.19:1995, 6.3.4.4.3. szakasz).

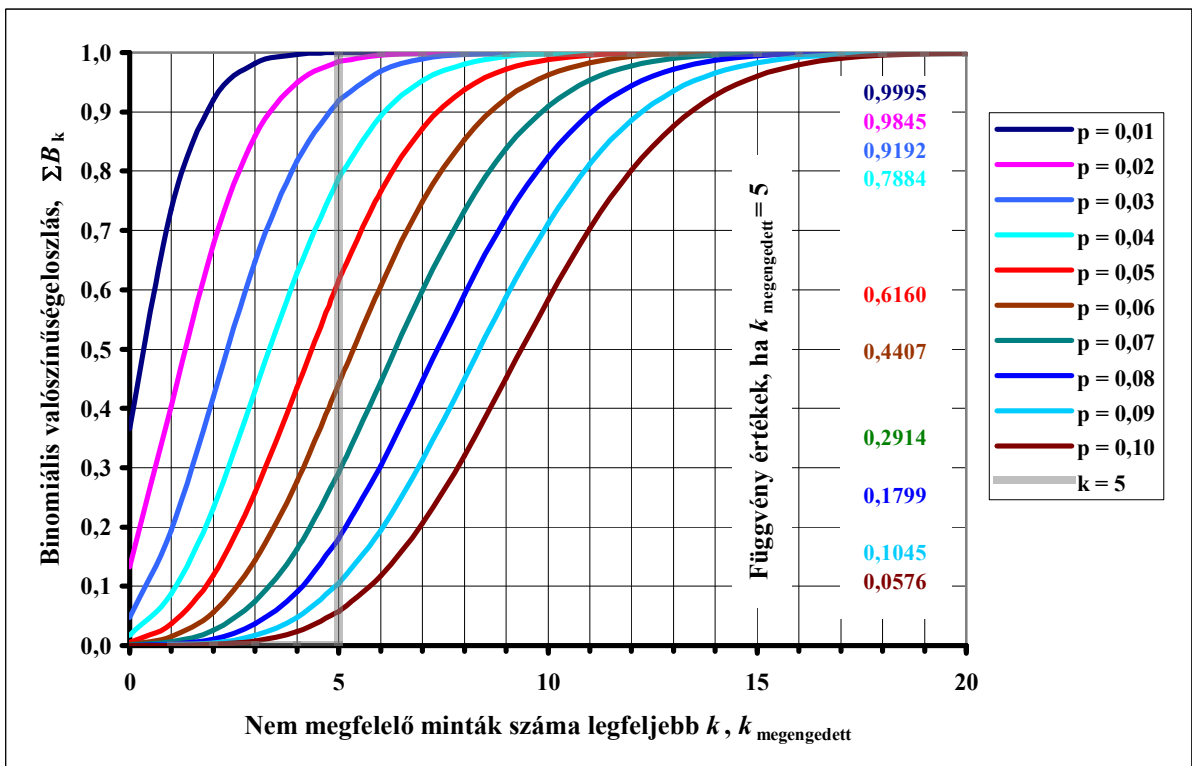
A 6. ábrán kitűnik, hogy míg az MSZ 4720-2:1980 szabvány szerinti átadás-átvételi eljárásban $n = 15$ minta esetén az elfogadási-visszautasítási valószínűség a kritikusan megfelelő betonra (alulmaradási hányad 5 %) ¹ nézve közelítőleg 40-60 % volt, addig a *Taerwe*-féle OC-görbét követő MSZ EN 206-1:2002 és MSZ 4798-1:2004 szabványok szerint a folyamatos gyártás során ugyancsak $n = 15$ minta esetén az átadás-visszautasítás valószínűsége a kritikusan megfelelő betonnál (alulmaradási hányad 5 %) közelítőleg 70-30 % (*Kausay T.* 2006 és 2007).

Az új betonszabványokban (MSZ EN 206-1:2002 és MSZ 4798-1:2004) a folyamatos gyártás nyomószilárdsági megfelelőségének 1. feltételében szereplő, az $n = 15$ mintaszámhoz tartozó $\lambda_{n=15} = 1,48$ értékű alulmaradási tényező lényegében a korábbi betonszabványban (MSZ 4720-2:1980) szereplő *Student*-tényező szerepét tölti be. A *Student*-tényező értéke (t_n) a mintaszámtól függött, értéke a korábbi betonszabványban minden esetben legalább $t_\infty = 1,645$ ($n = \infty$), de kis elemszámú minta esetén ennél lényegesen nagyobb volt. Az új betonszabványok – ezen a ponton legalábbis – egyértelműen a gyártónak kedveznek, hiszen minél kisebb az $f_{ck} = f_{cm} - \lambda_n \cdot s_n$ összefüggésben a szorozóként szereplő λ_n , illetve t_n alulmaradási tényező, adott átlagos nyomószilárdság (f_{cm}) és szórás (s_n) esetén annál nagyobb jellemző érték (f_{ck}) adódik. Az új és a régi betonszabványok megfelelőségi feltételrendszere alapvetően különbözik, és ez az OC-görbék eltérő elhelyezkedésében is megmutatkozik: a régi szabvány a beépített beton nyomószilárdságát egy szűrőpróbaszerűen is alkalmazható megfelelőségi feltétellel biztosította, az új szabványok pedig egy folyamatos nyomon követést és utólagos javítást feltételező – de azt elő nem író – minőségbiztosítási rendszer részeként alkalmazható megfelelőségi feltétellel kívánják biztosítani. A beton valamely nyomószilárdsági osztályát az európai szabvány szerint kisebb biztonsággal, kisebb nyomószilárdságokkal lehet elérni, mint a régi MSZ 4720-2:1980, vagy akár a régi DIN 1084:1988 és DIN 1045:1988 szabvánnyal lehetett (*Zäschke, W.* 1994, *Fischer L.* 1999).

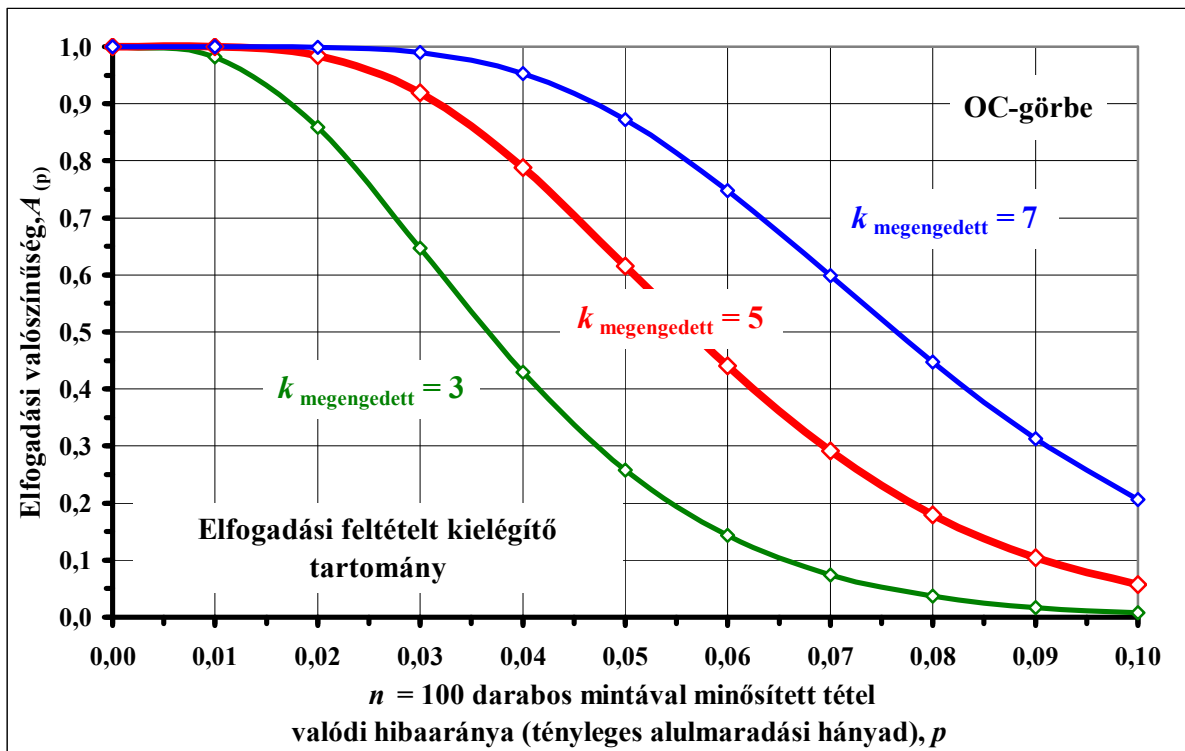
¹ Érdekességként megjegyezzük, hogy az 1970-es évek közepén-végén úgy tervezték, hogy a beton nyomószilárdságának jellemző értékét (küszöbszilárdságát) 2,275 %-os valószínűségi szint (alulmaradási hányad) figyelembevételével fogják meghatározni, amelyhez a *Gauss*-féle normális eloszlás esetén $2 \cdot \sigma$ alulmaradási tágasság tartozik (*Bölskei E.* – *Dulácska E.* 1974, *Palotás L.* 1979). Az elképzelés nem valósult meg, ugyanis az MSZ 4720-2:1980 szabványban az 5 %-os alulmaradási hányad képezte a jellemző érték számításának alapját. (Az MSZ 4720-2:1980 szabványt megelőző MSZ 4720:1961 és az abban hivatkozott MSZ 4715:1961 szabvány sem alkalmazta a 2,275 %-os valószínűségi szinten történő számítást.)



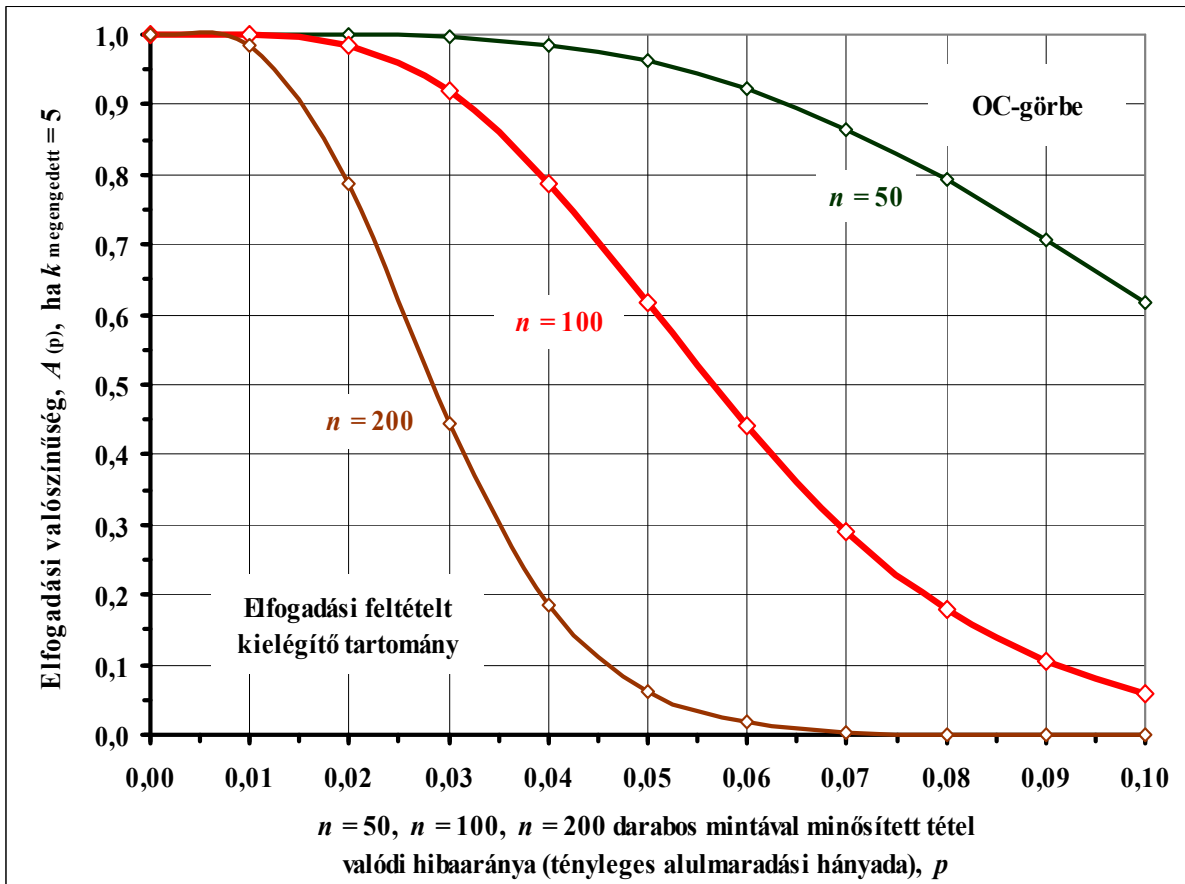
1. ábra: Binomiális valószínűségeloszlás gyakoriságfüggvénye, ha a mintavételek száma $n = 100$



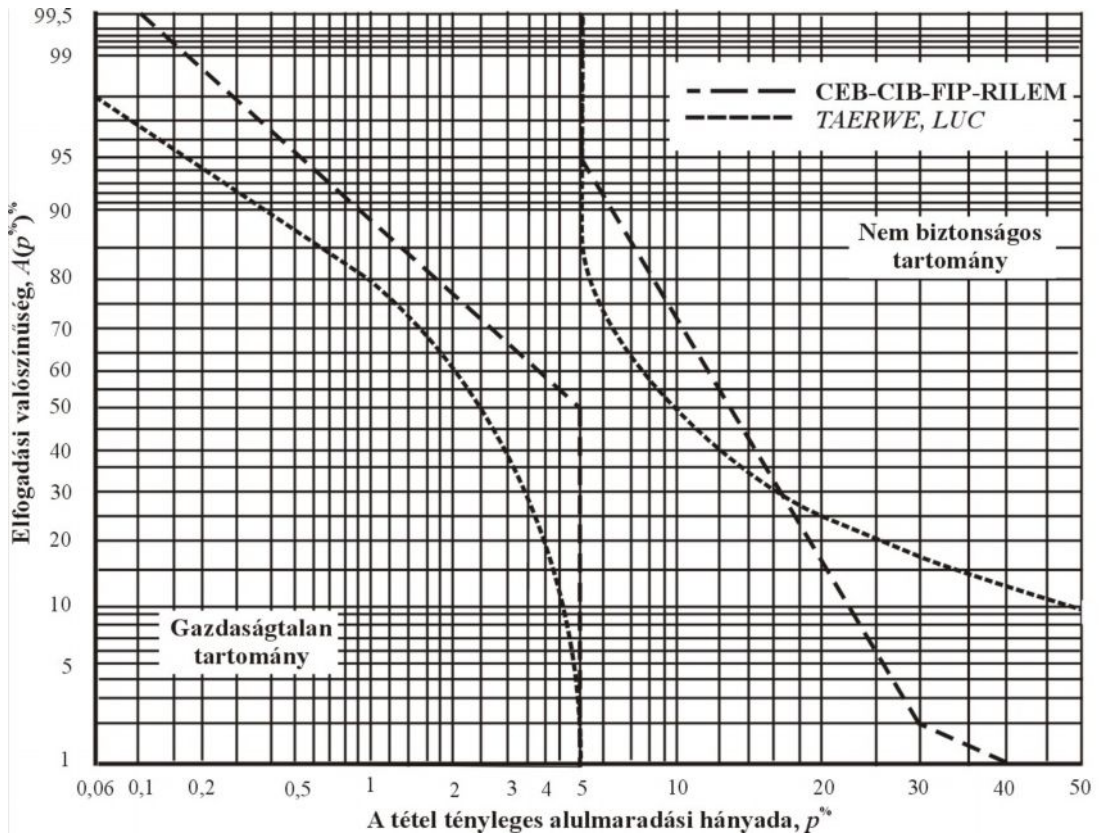
2. ábra: Binomiális valószínűségeloszlás eloszlásfüggvénye, ha a mintavételek száma $n = 100$



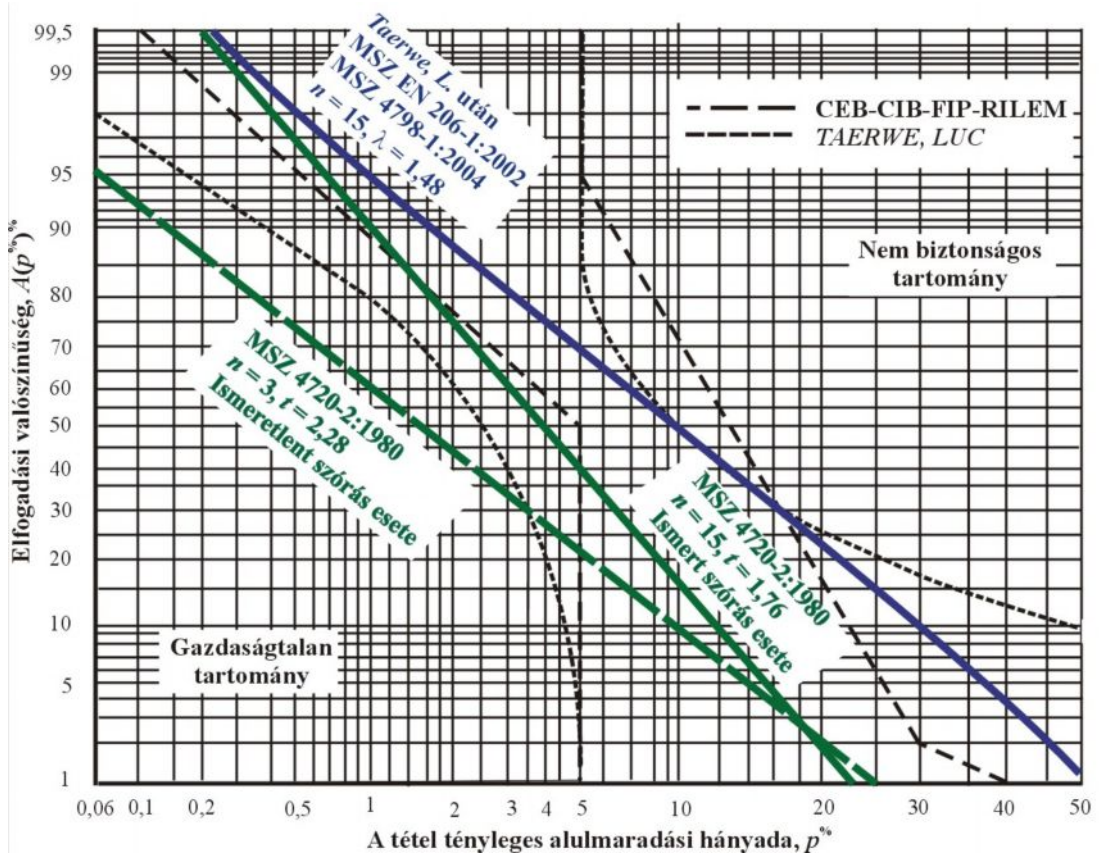
3. ábra: Elfogadási valószínűségi görbe binomiális eloszlás feltételezésével, ha a mintavételek száma $n = 100$ és a megengedett nem megfelelő minták száma $k_{\text{megengedett}} = 3$, $k_{\text{megengedett}} = 5$ és $k_{\text{megengedett}} = 7$



4. ábra: Elfogadási valószínűségi görbe binomiális eloszlás feltételezésével, ha a mintavételek száma $n = 50$, $n = 100$ és $n = 200$, és a megengedett nem megfelelő minták száma $k_{\text{megengedett}} = 5$



5. ábra: Az OC-görbék határvonalai a CEB-CIB-FIP-RILEM ajánlás szerint (MSZ 4720-2:1980) és azok *Taerwe, L.* által módosított változatai (MSZ EN 206-1:2002 és MSZ 4798-1:2004). Forrás: *Taerwe, L.* 1986



6. ábra: *Taerwe, L.* elfogadási feltételének OC-görbéje a vizsgálati eredmények közötti gyenge összefüggés esetén (forrás: *Taerwe, L.* 1986) összehasonlítva a visszavont MSZ 4720-2:1980 szabvány ismeretlen és ismert szóráson alapuló elfogadási feltételének OC-görbéjével (forrás: MÉASZ ME-04.19:1995)

Felhasznált szabványok és irodalom

- MSZ 339:2008.10.06. szabványjavaslat. Betonacélok. Melegen hengerelt betonacél, hidegen alakított betonacélhuzal, gépi hegesztéssel készített síkhálók és térbeli rácos tartók. Követelmények
- MSZ 4715:1961 Megszilárdult beton vizsgálata
- MSZ 4720:1961 A betonok minőségi követelményei és minősítésük
- MSZ 4720-2:1980 A beton minőségének ellenőrzése. 2. rész: Általános tulajdonságok ellenőrzése
- MSZ 4798-1:2004 Beton. 1. rész: Műszaki feltételek, teljesítőképesség, készítés és megfelelés. Az MSZ EN 206-1 és alkalmazási feltételei Magyarországon
- MSZ EN 206-1:2002 Beton. 1. rész: Műszaki feltételek, teljesítőképesség, készítés és megfelelés (Módosítások: MSZ EN 206-1:2000/A1:2004 és MSZ EN 206-1:2000/A2:2005)
- DIN 1084-1 és -3:1988 Überwachung (Güteüberwachung) im beton- und Stahlbetonbau. Teil 1: Beton BII auf Baustellen, Teil 3: Transportbeton
- DIN 1045:1988 Beton und Stahlbeton; Bemessung und Ausführung
- Bölskei Elemér – Dulácska Endre: Statikusok könyve. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1974.
- Fischer, Lutz: Sicherheitskonzept für neue Normen. ENV und DIN-neu. Grundlagen und Hintergrundinformationen. Teil 3: Statistische Auswertung von Stichproben im eindimensionalen Fall. Bautechnik, 76. 1999. Heft 4. pp. 328-338.
- György László: Az MSZ 4720 és az MSZ ENV 206 T minősítési módszereinek az összehasonlítása. MÉÁSZ ME-04.19:1995 „Beton és vasbeton készítése” című műszaki előírás (szerkesztette és írta Ujhelyi János), 6. fejezet: „Vizsgálat, minőség-ellenőrzés, minőségtanúsítás” 6.3.4.4.4. szakasza, Budapest, 1995.
- International System of Unified Standard Codes of Practice for Structures, Vol. II, CEB-FIP Model Code for Concrete Structures, CEB-FIP, 1978.
- Kausay Tibor: A szemcsealak minősítéses vizsgálatának mintaelemszáma. Mélyépítéstudományi Szemle. XX. évfolyam. 1970. 8. szám, pp. 373-388.
- Kausay Tibor: A beton nyomószilárdságának elfogadása. Vasbetonépítés. VIII. évfolyam, 2006. 2. szám, pp. 35-44.
- Kausay Tibor: Alulmaradási tényező. Fogalom-tár. Beton szakmai havilap. XV. Évfolyam, 2007. 1. szám, pp. 3-5.
- Palotás László: Mérnöki szerkezetek anyagtana 1. kötet. Általános anyagismeret. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1979.
- Taerwe, Luc: A General Basis for the Selection of Compliance Criteria (A megfelelési feltételek kiválasztásának általános alapja). IABSE Proceedings P-102/86. IABSE Periodica 3/1986 August.
- Vincze Endre: Műszaki matematika. V. kötet. Valószínűségszámítás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1972.

- Vincze István (szerkesztette): Statisztikai minőség-ellenőrzés. Az ipari minőségellenőrzés matematikai statisztikai módszerei. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1958.
- Windisch Andor: Valószínűségelméleti és matematikai statisztikai alapismeretek. Szalai Kálmán „A beton minőségellenőrzése” című könyvének 3. fejezete. Szabványkiadó, Budapest, 1982.
- Windisch Andor: A beton minőségének ellenőrzése. Balázs György „Építőanyag praktikum” című könyvének 4.6.2. fejezete. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1983.
- Zäschke, Wolfgang: Konformitätskriterien für die Druckfestigkeit von Beton. Betonwerk + Fertigteil-Technik, 60. Jg. 1994. Heft 9. pp. 94-100.

Vissza a

Noteszlapok abc-ben



Noteszlapok tematikusan



tartalomjegyzékhez