Szemmegoszlási jellemzők

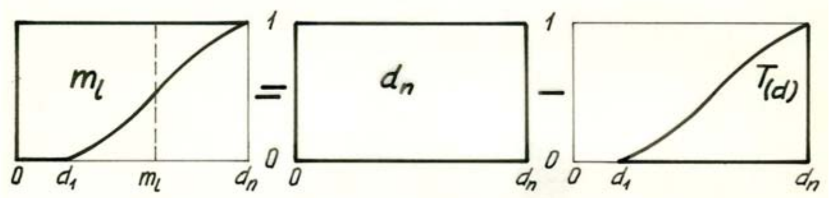
Németül:	Charakteristiken der Korngrößenverteilung
Angolul:	Characteristics of particle size distribution
Franciául:	Caractéristique de composition granulométrique

Kutatási, fejlesztési és igényesebb tervezési feladatok megoldása során a betonok ❖ és habarcsok ❖ adalékanyagául ❖, esetleg töltőanyagául szolgáló homokok, homokos kavicsok ❖, zúzottkövek ❖, kőlisztek stb. szemmegoszlását ❖ számszerűen a várhatóértékkel, a szórásnégyzettel, a variációs tényezővel, az átlagos szemnagysággal, a logaritmikus finomsági modulussal ❖, és a térfogati fajlagos felülettel ❖ jellemezhetjük. Ezek kiszámítása mindig a szitavizsgálat ❖, vagy szedimentálás ❖ eredménye alapján történhet.

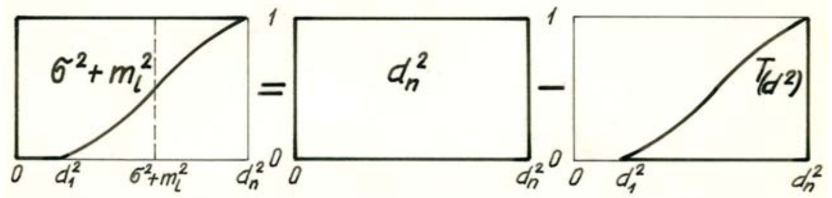
A szemmegoszlási jellemzők szemléltetéséhez és számításához azt a közös tulajdonságukat használjuk fel, hogy mindegyikük értéke kifejezhető a jellegüknek megfelelően transzformált abszcisszatengelyen ábrázolt szemmegoszlási görbe alatti vagy feletti területtel. Ehhez az abszcisszatengelyek beosztását úgy kell megválasztani, hogy a koordinátarendszerbeli területek a szemmegoszlási jellemzőkkel arányosak legyenek, amit a szemmegoszlási görbe eredetileg lineáris abszcisszatengelyének esetenkénti transzformációjával lehet elérni. A lineáris skálabeosztású abszcisszatengely a szemnagyságnak, a transzformált tengely a szemnagyság származékának kifejezője.

A szemnagysággal a várhatóérték egyenes, a szórásnégyzet négyzetes, az átlagos szemnagyság és a logaritmikus finomsági modulus logaritmikus, a térfogati fajlagos felület fordított arányú összefüggésben áll. Ezért a várhatóértéket lineáris, a szórásnégyzetet négyzetes, az átlagos szemnagyságot és a logaritmikus finomsági modulust logaritmikus, a térfogati fajlagos felületet reciprok beosztású abszcisszatengelyre rajzolt szemmegoszlási görbével jelenítjük meg.

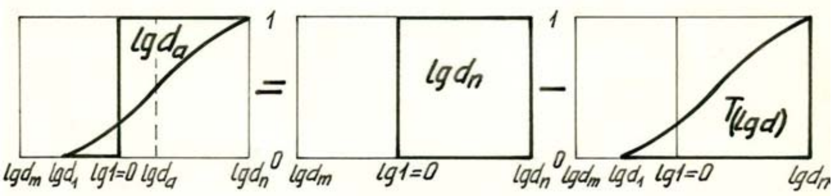
A független változó az abszcisszatengely lineáris beosztása esetén d, négyzetes beosztása esetén d^2, logaritmikus beosztása esetén lg$d$, reciprok beosztása esetén d^{-1}. A d mértékegysége mm. Utaljanak az alsó indexek a halmaz-határokra, az 1 az elsőre, az n az utolsóra, azaz a két utóbbi a szemhalmaz legkisebb és legnagyobb szemnagyságára.



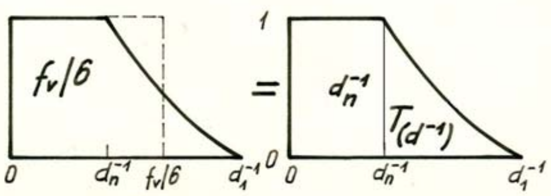
1. ábra. A lineáris finomsági modulus kifejezése



2. ábra. A szórásnégyzet kifejezése



3. ábra. A logaritmikus várhatóérték kifejezése



4. ábra. A térfogati fajlagos felület kifejezése

Keressük a kapcsolatot a megfelelő görbe alatti területek és a különböző szemmegoszlási jellemzők között. A *p'* sűrűségfüggvény és származékai alatt mindig tömegarányt kifejező *valószínűségi sűrűségfüggvényt,* a hozzá tartozó *p* eloszlásfüggvény és származékai alatt mindig *relatív tömeg-eloszlásfüggvényt* kell érteni. A *p'* sűrűségfüggvény és a *p* eloszlásfüggvény kapcsolata:

$$p = \int_{d_1}^{d} p' \, \mathrm{d}d$$

A *p'* sűrűségfüggvény alatti terület értéke $v_0 = 1$.

A *d* szemnagyság ***várhatóértéke***, vagy más néven a **lineáris finomsági modulus** (m_l) azonos a *p'* sűrűségfüggvény alatti területnek az ordináta-tengelyre vett elsőrendű nyomatékával (v_1), amely egyenlő a *p* eloszlásfüggvény feletti területtel (Ψ_0), azaz a *lineáris beosztású abszcisszatengellyel* rendelkező koordinátarendszerben ábrázolt szemmegoszlási görbe $d=0$ és d_n határú intervalluma feletti m_l területtel (*1. ábra*):

$$m_l = v_1 = \Psi_0 = \int_{d_1}^{d_n} d \cdot p' \, \mathrm{d}d = \int_{0}^{d_n} \mathrm{d}d - \int_{d_1}^{d_n} p \, \mathrm{d}d = d_n - T_{(d)} \qquad [\mathrm{mm}]$$

(1)

A ***szórásnégyzet*** a *p'* sűrűségfüggvény alatti területnek a várhatóérték függőlegesére vett μ_2 másodrendű centrális nyomatéka. Bizonyítható, hogy a szórásnégyzet, azaz a μ_2 másodrendű centrális nyomaték egyenlő a v_2 másodrendű nyomaték és a v_1 elsőrendű nyomaték négyzetének különbségével, ami nem más, mint a lineáris beosztású abszcisszatengellyel rendelkező koordinátarendszerben ábrázolt szemmegoszlási görbe feletti terület — az ordinátatengelyre vett — kétszeres Ψ_1 elsőrendű nyomatékának és a várhatóérték négyzetének különbsége:

$$\sigma^2 = \mu_2 = v_2 - v_1^2 = 2 \cdot \Psi_1 - m_l^2$$

Ha a *p* eloszlásfüggvényt nem lineáris, hanem *négyzetes beosztású abszcisszatengellyel* rendelkező koordinátarendszerben ábrázoljuk, akkor a kétszeres Ψ_1 elsőrendű nyomaték helyébe egyszeres nulladrendű nyomaték lép, azaz a *szórásnégyzet* egyenlő a *négyzetes beosztású abszcisszatengellyel* rendelkező koordinátarendszerben ábrázolt szemmegoszlási görbe $d=0$ és d_n^2 határú intervalluma feletti (d_n^2-T_d2) terület és a várhatóérték négyzete (m_l^2) különbségével (*2. ábra*):

$$\sigma^2 = d_n^2 - m_l^2 - T_{(d^2)} \qquad \text{azaz} \qquad \sigma^2 + m_l^2 = d_n^2 - T_{(d^2)} \qquad [\mathrm{mm}^2]$$

(2)

A σ^2 szórásnégyzet felhasználásával kiszámítható a *σ szórás*, a σ^2/m_{lin}^2 *relatív szórásnégyzet*, a σ/m_{lin} *relatív szórás* azaz *variációs tényező*.

Ha a szemmegoszlási görbét tízes alapú *logaritmikus beosztású abszcisszatengellyel* rendelkező koordinátarendszerben ábrázoljuk, akkor az előzőekben tárgyalt várhatóérték helyébe a ***logaritmikus várhatóérték*** lép. Minthogy a logaritmikus várhatóérték nem más, mint az átlagos szemnagyság tízes alapú logaritmusa (lgd_a, amelyet lg$d_{átlag}$-nak is jelölnek), következik, hogy felhasználásával az ***átlagos szemnagyság*** kiszámítható. Az átlagos szemnagyságot tehát tízes alapú logaritmikus beosztású abszcisszatengelyű koordinátarendszerben értelmezzük, és számértéke eltér a lineáris finomsági modulus számértékétől.

A várhatóértéket meghatározása szerint az eloszlásfüggvény feletti terület fejezi ki. A zérus kezdőértékű lineáris abszcisszatengely felett e terület határai $d=0$ és d_n, azaz az ordinátatengely és a legnagyobb szemnagyság.

Logaritmikus beosztású abszcisszatengely esetén a legnagyobb szemnagyság a lgd_n helyen található, de az ordinátatengely helyének értelmezése ennél bonyolultabb, mert az abszcisszatengely kezdőértéke — mivel lg0=-∞ — az eddigiektől eltérően zérustól különböző szám kell, hogy legyen. Az ordinátatengely szerepét a lg1=0 értékű abszcisszarendező veszi át, amely két térfélre osztja a koordinátarendszert. Minthogy az egynél kisebb számok logaritmusa zérusnál kisebb értékű, azaz negatív előjelű, a lg1=0 értékű abszcisszarendezőtől balra eső térfél előjele negatív lesz. A d_1<1 mm legkisebb szemnagyságú szemmegoszlási görbe a legnagyobb szemnagyság értékétől függően e negatív térfélben helyezkedik el (ha d_n<1 mm), vagy a pozitív térfélből oda átnyúlik (ha d_n>1 mm). Ez utóbbi lehetőséget tekinthetjük a gyakorlatban leginkább előforduló általános esetnek.

Így a logaritmikus várhatóértékkel kapcsolatban nem beszélhetünk görbe feletti, hanem csak görbével határolt területről. Eszerint a *logaritmikus várhatóérték* (lgd_a) azonos a logaritmikus beosztású abszcisszatengellyel rendelkező koordinátarendszerben ábrázolt eloszlásfüggvénnyel határolt területtel, amely a lg1=0 értékű abszcisszarendezőtől balra lévő negatív térfélben görbe alatti, az attól jobbra lévő pozitív térfélben görbe feletti részterület (*3. ábra*), amit a következőképpen lehet kifejezni:

$$lg\, d_a = lg\, d_n - T_{(lg\, d)} \tag{3}$$

A (3) jelű egyenletbe a *d* értékét mm-ben helyettesítjük be, a lgd_a értékét pedig nevezetlen számnak tekintjük.

Az *átlagos szemnagyság* (d_a, amelyet $d_{átlag}$-nak is jelölnek) a logaritmikus várhatóérték (lgd_a) numerusa, amelyet a (3) jelű egyenlet értékének meghatározása után számíthatunk ki:

$$d_a = 10^{lg\, d_a} \qquad \text{[mm]}$$

A *3. ábrán* látható, hogy a lgd_a logaritmikus várhatóérték, és így a d_a logaritmikus átlagos szemnagyság is, független az abszcisszatengely *lg*d_m kezdőértékétől.

A logaritmikus finomsági modulus a logaritmikus várhatóértékből származtatható. Levezetéséhez ki kell számítani az F_{lgd} ***Hummel-féle területet*** ❖, amely a klasszikus megfogalmazás szerint azonos a tízes alapú *logaritmikus beosztású abszcisszatengellyel* rendelkező koordinátarendszerben ábrázolt szemmegoszlási görbe feletti területtel, amely az abszcisszatengely lgd_m kezdőértékéig terjed. A művelet úgy hajtható végre, hogy a lgd_a és a lgd_m által képviselt területek különbségét kell képezni, ami a lgd_m negatív előjele miatt számszakilag összeadást jelent:

$$F_{lg\, d} = lg\, d_a - lg\, d_m = m_{lg} \cdot lg\, 2 \qquad \text{azaz} \qquad m_{lg} = \frac{F_{lg\, d}}{lg\, 2}$$

A d_a és d_m értékek mértékegysége mm, az F_{lgd} értéke nevezetlen szám, az m_{lg} a ***logaritmikus finomsági modulus***, ugyancsak nevezetlen szám.

A *Hummel-féle terület* (F_{lgd}) nagysága és következésképpen annak származékai, mint a különböző abszcisszatengely kezdőértékekhez tartozó *logaritmikus finomsági modulusok*, jelentős mértékben függnek a *Hummel-féle* területet határoló lgd_m abszcisszatengely kezdőérték, illetve az ahhoz tartozó $d_m \neq 0$ szemnagyság megállapodás tárgyát képező értékétől. Napjainkban az abszcisszatengely kezdőértékét általában d_m=0,063 mm-nek veszünk fel.

A XX. század első felének betonkutatói, így az amerikai *Abrams* (1918), a német *Hummel* (1930), majd követőik, mint a német *Spindel* (1931), az osztrák *Stern* (1932), és később itthon *Palotás* (1952, 1961), *Popovics* (1952, 1953), *Balázs* (1994), a beton adalékanyagok szemmegoszlását nem az abszcisszatengely kezdőértéktől független d_a logaritmikus átlagos szemnagysággal jellemezték, hanem a — gyakorlat számára kétségkívül szemléletes és jól kezelhető — görbe feletti F_{lgd} *Hummel*-féle területtel hozták összefüggésbe. Az adalékanyag szemmegoszlásának ma is a *Hummel*-féle területből levezethető logaritmikus finomsági modulus a legfőbb jellemzője.

A ***térfogati fajlagos felület*** az egységnyi testtérfogatú szemhalmaz szemeinek felületösszege, azaz a szemhalmaz szemei külső felülete összegének és a szemek

— többnyire pórusokat is tartalmazó, tehát a külső felület által határolt — térfogata összegének hányadosa.

A gömb vagy kocka alakú, tehát idealizált szemalakú szemek halmazának f_V térfogati fajlagos felületét kifejezhetjük, mint a *p'* sűrűségfüggvény alatti területnek az ordinátatengelyre vett (-1)-rendű v_{-1} nyomatéka hatszorosát:

$$f_V = 6 \cdot v_{-1} = 6 \cdot \int_{d_1}^{d_n} d^{-1} \cdot p' \, \mathrm{d}d \qquad [\mathrm{mm}^{-1}]$$

Bevezetve az $u=d^{-1}$ [mm^{-1}] jelölést és a fenti egyenletbe behelyettesítve megfelelőit, bizonyítható, hogy

$$f_V = 6 \cdot v_{-1} = 6 \cdot \left(\int_0^{u_n} \mathrm{d}u + \int_{u_n}^{u_1} p_u \, \mathrm{d}u \right) \qquad [\mathrm{mm}^{-1}]$$

Eszerint a térfogati fajlagos felület a *reciprok beosztású abszcisszatengellyel* rendelkező koordinátarendszerben ábrázolt szemmegoszlási görbe alatti terület hatszorosával egyenlő (*4. ábra*), azaz

$$f_V = 6 \cdot (d_n^{-1} + T_{(d^{-1})}) \qquad [\mathrm{mm}^{-1}] \qquad (4)$$

A szemhalmaz térfogati fajlagos felületének értéke nagyon érzékeny a finomszemek nagyságára és mennyiségére. Például szélső esetként a d_1=0 legkisebb szemnagyságú szemhalmazok térfogati fajlagos felületének számítása kifejezetten nehézségekbe ütközik, mert ha d_1=0, akkor $u_1=\infty$ és $f_V=\infty$, azaz a térfogati fajlagos felület értéke végtelen nagyra adódik. Ezért feltételül szoktuk szabni, hogy $d_1 \geq 0{,}001$ mm illetve $u_1 \leq 1000$ mm^{-1} kell legyen. Bár e feltétel önkényes, értéke azért fogadható el, mert a beton adalékanyagban a legfinomabb szemek az agyag szemek, (amelyek szemnagysága 0,002 mm-nél kisebb,) és ezek mennyiségét egyébként is tudatosan korlátozzuk.

Az építőanyagipari gyakorlatban a szemhalmazok egységnyi mennyiségére eső felületet a *térfogati fajlagos felület* helyett szívesen fejezik ki a *tömegi fajlagos felülettel*, amit egyszerűen ***fajlagos felületnek*** ❖ neveznek. Ennek méréstechnikai oka van, míg ugyanis a térfogati fajlagos felület egy számított szemmegoszlási jellemző, addig a fajlagos felület értékét meg lehet mérni. A fajlagos felület mértékegysége m^2/kg, ami 1000 mm^2/g-nak felel meg.

Az *f* fajlagos felület és az f_v térfogati fajlagos felület kapcsolatát az (5) jelű egyenlet írja le.

$$f = 10^3 \cdot \frac{f_V}{\rho_T} \qquad [\mathrm{m}^2/\mathrm{kg}] \qquad (5)$$

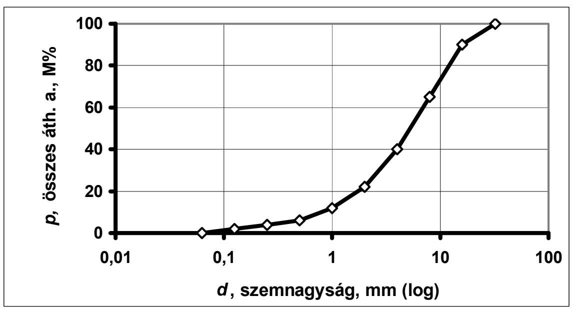
ahol f_V a térfogati fajlagos felület [1/mm], és ρ_T a kiszárított állapotú szemhalmaz szemeinek átlagos testsűrűsége [kg/m^3].

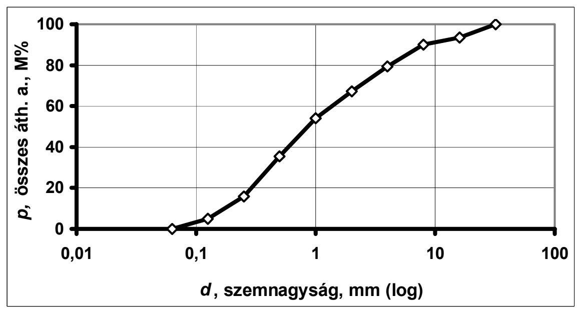
A fajlagos felület az anyag testsűrűségének is függvénye, ezért — a térfogati fajlagos felülettel ellentétben — nem tekinthető kifejezetten szemmegoszlási jellemzőnek, hiszen a fajlagos felület csak az azonos testsűrűségű szemek halmazai felületének közvetlen összevetésére alkalmas.

Az *1. táblázatban* két példát mutatunk be — egymással párhuzamba állítva — a szemmegoszlási jellemzők számításának eredményére. Az *1. táblázatban* szereplő durvább és finomabb szemhalmazok szemmegoszlási jellemzőinek összevetéséből jól látható, hogy a szemmegoszlási görbe változásait a szemmegoszlási jellemzők értékei érzékenyen követik, elhelyezkedését kifejező módon leírják.

1. táblázat: Példák a szemmegoszlási jellemzők számításának eredményére

Durvább szemmegoszlás				Finomabb szemmegoszlás			
d [mm]	p [tömeg%]	d [mm]	p [tömeg%]	d [mm]	p [tömeg%]	d [mm]	p [tömeg%]
d_1=0,063	p_1=0	d_6=2	p_6=22	d_1=0,063	p_1=0	d_6=2	p_6=67,3
d_2=0,125	p_2=2	d_7=4	p_7=40	d_2=0,125	p_2=5	d_7=4	p_7=79,4
d_3=0,25	p_3=4	d_8=8	p_8=65	d_3=0,25	p_3=15,9	d_8=8	p_8=90
d_4=0,5	p_4=6	d_9=16	p_9=90	d_4=0,5	p_4=35,5	d_9=16	p_9=93,5
d_5=1,0	p_5=12	d_{10}=32	p_{10}=100	d_5=1,0	p_5=54,2	d_{10}=32	p_{10}=100





m_1 7,648	σ^2 57,598	σ 7,589	σ^2/m_1^2 0,985	m_1 3,414	σ^2 41,472	σ 6,440	σ^2/m_1^2 3,557
$\lg d_a$ 0,629	d_a 4,258	$F_{dm=0,063}$ 1,830	m_{lg} 6,079	$\lg d_a$ 0,028	d_a 1,066	$F_{dm=0,063}$ 1,228	m_{lg} 4,081
f_v 4,357 [mm^{-1}]		f (ρ = 2640 kg/m^3) 1,651 [m^2/kg]		f_v 13,735 [mm^{-1}]		f (ρ = 2640 kg/m^3) 5,203 [m^2/kg]	

Ha ide tetszik kattintani, akkor egy Excel oldal töltődik le. Ebben található egy ábra egy szemmegoszlási görbével, és körülötte a görbéhez tartozó szemmegoszlási jellemzőkkel. Ha ki tetszik jelölni a görbe pontjait, és a bal egérgombbal el tetszik húzni az ábrán a kijelölt pontok közül egyet-kettőt, akkor egyrészt megváltozik a görbe alakja, másrészt megváltoznak a szemmegoszlási görbéhez tartozó, az ábra körül látható szemmegoszlási jellemzők értékei.

Felhasznált irodalom:

Kausay Tibor: Beton adalékanyagok szemmegoszlási jellemzőinek számítása grafoanalitikus módon. Vasbetonépítés. 2004. VI. évfolyam. 1. szám. pp. 3-11.

Jelmagyarázat: A jel előtt álló fogalom a fogalomtár szócikke.

Rövidített változata megjelent a	BETON szakmai havilap	2005. február havi számának 6-7. oldalán

Vissza a fogalmak tartalomjegyzékéhez